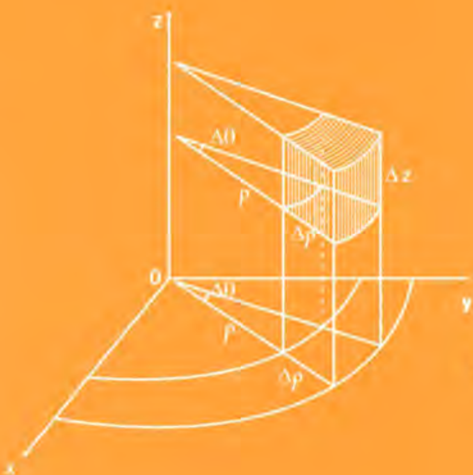
Prof. AHMET A. KARADENİZ

YÜKSEK MATEMATİK

CİLT 3

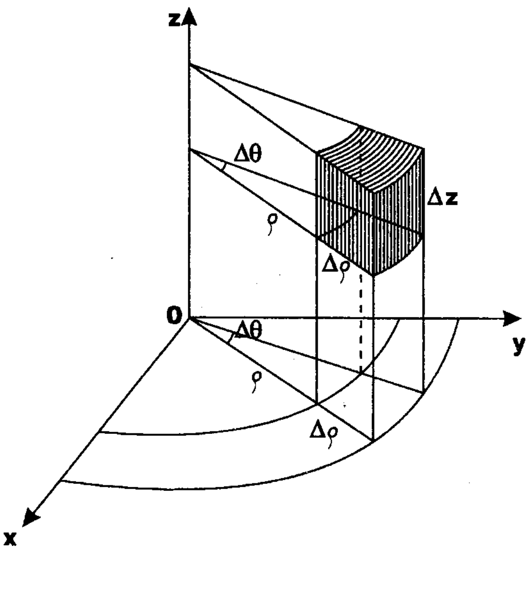


DİFERANSİEL DENKLEMLER
KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER
KATLI İNTEGRALLER
VEKTÖR ANALİZİ
EĞRİSEL İNTEGRALLER
YÜZEY İNTEGRALLERİ
İNTEGRAL İŞARETİ ALTINDA TÜREV

Çağlayan Kitabevi
Beyoğlu - İSTANBUL

Prof. AHMET A. KARADENİZ

YÜKSEK MATEMATİK



CİLT 3

DİFERANSİEL DENKLEMLER
KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER
KATLI İNTEGRALLER
VEKTÖR ANALİZİ
EĞRİSEL İNTEGRALLER
YÜZEY İNTEGRALLERİ
İNTEGRAL İŞARETİ ALTINDA TÜREV

Çağlayan Kitabevi

Galatasaray, İstiklal Caddesi No:166 Tokatlıyan
İş Hanı Kat:1 No:7-8-9-21 Beyoğlu - İSTANBUL
Tel:(0.212) 245 44 33 Faks: 249 17 94
e-mail:info@caglayan.com www.caglayan.com

Sekizinci Baskı
2004

ISBN: 975 -436-055-3

Basıldığı Yer:
Çağlayan Basımevi
Çatalçeşme Sok. Yavuz Han No:26/3 - 4 Cağaloğlu - İstanbul

İÇİNDEKİLER

21. BÖLÜM

DİFERANSİEL DENKLEMLER

22. BÖLÜM

KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER

23. BÖLÜM

KATLI İNTEGRALLER

24. BÖLÜM

VEKTÖR ANALİZİ

25. BÖLÜM

EĞRİSEL İNTEGRALLER VE YÜZEY İNTEGRALLERİ

26. BÖLÜM

İNTEGRAL İŞARETİ ALTINDA TÜREV

YÜKSEK MATEMATİK

Cilt. 1

Diferansiel ve integral hesap

Cilt. 2

Seriler
Fourier serileri
Kompleks sayılar
Uzay analitik Geometri
Çok değişkenli fonksiyonlar

Cilt. 3

Diferansiel denklemler
Kısmi türevli denklemler
Katlı integraller
Vektör analizi
Eğrisel integraller
Yüzey integralleri
İntegral işareti altında türev

21. BÖLÜM

DİFERANSİEL DENKLEMLER

21.1 Genel tanımlar.

21.1 - 1. Diferansiel denklem tanımı.

x bağımsız değişkeni, bilinmiyen $y = f(x)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun $y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}$ türevleri arasındaki bir bağıntıya *diferansiel denklem* denir. Böyle bir denklem sembolik olarak

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

veya

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

şeklinde gösterilir.

$y = f(x)$ fonksiyonu tek değişkenli bir fonksiyon ise denkleme *adi diferansiel denklem* denir. Birkaç bağımsız değişkenli fonksiyonla bu fonksiyonun belirli bir mertebeye kadar kısmi türevleri ve bağım-

sız değişkenler arasındaki bir bağıntıya *kısmi diferansiel denklem* veya *kısmi türevli denklem* denir.

$$\frac{dy}{dx} - y = \sin x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + P(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} = Q(x, y)$$

denklemlerinden birincisi adi diferansiel denkleme, ikinci ise kısmi türevli denkleme bir örnek teşkil ederler. Adi diferansiel denklemlere kısaca diferansiel denklem denir.

21.1 - 2. Diferansiel denklemin mertebesi.

Bir diferansiel denklemin mertebesi, denklemde mevcut olan en yüksek mertebeli türevin mertebesidir.

$$2y'' - 3y' + 5y = x^2$$

denklemi ikinci mertebeden,

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 2x^3$$

denklemi birinci mertebeden diferansiel denklemlerdir.

21.1 - 3. Diferansiel denklemin çözümleri (integralleri).

Bir diferansiel denklemi özdeş olarak sağlıyan her $y = f(x)$ fonksiyonuna diferansiel denklemin *çözümü* veya *integrali* denir. Bir diferansiel denklemi çözmek demek, türevleri ile birlikte, diferansiel denklemde yerlerine konulduğu zaman, denklemi özdeş olarak sağlıyan bütün fonksiyonları bulmak demektir. Bir diferansiel denklemin çözümlerinin, her zaman elemanter fonksiyonlar ile veya bilinen fonksiyonların açık bir ifadesi şeklinde gösterilebilmesi beklenemez. Diferansiel denklemlerin çözümleri, *genel, özel* ve *tekil* olmak üzere üç türdür.

n. mertebeden bir diferansiel denklemin *genel çözümü*, sayıca daha aşağı düşürülemiyen n tane keyfi sabiti içerir. *Özel çözümler*, genel çözümlerden sözü geçen sabitlere özel değerler vermek suretiyle elde edilir. Bunlardan başka, bazı diferansiel denklemlerin, bu denklemi sağlıyan, fakat genel çözümlerden bulunamıyan bir veya birkaç çözümü daha olabilir ki bu çözümlere *tekil çözümler* denir.

Örneğin

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 1$$

denkleminin genel çözümü $y = \sin(x + c)$ dir. $c = \frac{\pi}{2}$ alınırsa $y = \cos x$ şeklinde bir özel çözüm bulunur. $c = 0$ için özel çözüm $y = \sin x$ olur. $y = \pm 1$ ifadesi de bu denklemi sağlar. Ancak bu çözümler $y = \sin(x + c)$ genel çözümünden elde edilemez. Bu nedenle $y = \pm 1$ çözümleri tekil çözümlerdir.

$y = \sin(x + c)$ bir eğriler ailesi gösterir. Bu eğrilere diferansiel denklemin *integral eğrileri* denir. Bu eğrilerin hepsi aynı bir geometrik özeliğe sahiptir. Şöyleki, bu eğriler üzerindeki herhangi bir (x, y) noktasının koordinatları ve bu noktadaki teğetin y' eğimi

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 1$$

diferansiel denklemini sağlarlar.

Tekil integral, genel çözümü teşkil eden integral eğrilerinin zarfıdır. Yukarıdaki denklemin $y = \pm 1$ şeklindeki tekil integrallerinin, $y = \sin(x + c)$ integral eğrilerinin zarfı olduğu kolayca gösterilebilir. Buna göre, integral eğrilerinin zarfının, diferansiel denklemin bir çözümü olacağı aşikârdır. O halde zarfın bulunması için verilmiş olan kural tekil integrali bulmak için de kullanılabilir. (Bak. 20.9).

21.1 - 4. Diferansiel denklemlerin teşkili.

$y = f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ fonksiyonu sayıca daha aşağı indirilemiyen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ gibi n tane keyfi sabiti içeriyorsa yani, xoy düz-

leminde n parametreli bir eğri ailesi gösteriyorsa, bu takdirde n yinci mertebeye kadar olan

$$
\begin{aligned}
y' &= f'(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \\
y'' &= f''(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \\
&\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
&\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
y^{(n)} &= f^{(n)}(x, c_1, c_2, \dots, c_n)
\end{aligned}
$$

türevleri yardımiyle c_i parametreleri yok edilebilir. Sonuç, aileye dahil bütün eğrilerin ortak bulunduğu geometrik özeliği ifade eden n yinci mertebeden bir diferansiel denklem olur.

ÖRNEK. A ve B keyfi sabitler olarak $y = A \cos x + B \sin x$ eğri ailesinin diferansiel denklemini bulunuz.

$$
\begin{aligned}
y' &= -A \sin x + B \cos x \\
y'' &= -A \cos x - B \sin x
\end{aligned}
$$

olarak $-A \cos x - B \sin x = -y$ olduğu gözönüne alınırsa

$$y'' = -y \quad \text{veya} \quad y'' + y = 0$$

elde edilir.

21.2 Birinci mertebeden diferansiel denklemler.

Birinci mertebeden her diferansiel denklem

$$F(x, y, y') = 0$$

veya

$$\boxed{M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0}$$

şeklindedir. Bu denklem y' türevine göre çözülebilirse

$$y' = f(x, y)$$

şekline girer.

Başlangıç şartı veya c sabiti ne olursa olsun diferansiel denklemi sağlıyan ve c keyfi sabitine bağlı

$$y = \varphi(x, c)$$

şeklindeki bir fonksiyona birinci mertebeden diferansiel denklemin *genel çözümü* denir. $y = \varphi(x, c)$ genel çözümünde $c = c_0$ yaparsak elde edilecek her

$$y = \varphi(x, c_0)$$

fonksiyonuna *özel çözüm* denir.

Genel çözüm, geometrik olarak bir c parametresine bağlı bir eğriler ailesini gösterir. Bu eğriler, diferansiel denklemin integral eğrileridir. Özel çözüm ise, bu ailenin, düzlemin verilmiş bir noktasından geçen bir eğrisini gösterir.

ÖRNEK. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$ diferansiel denkleminin genel çözümü $y = \dfrac{c}{x}$ dir. Bu denklem bir hiperbol ailesi verir. $x_0 = 2$ için $y_0 = 1$ başlangıç şartını sağlıyan özel çözüm $y = \dfrac{2}{x}$ dir.

Birinci mertebeden diferansiel denklemlerin çözümü için genel bir kural olmayıp çeşitli tipten diferansiel denklemlerin çözümleri için özel kurallar vardır. Bu nedenle, birinci mertebeden diferansiel denklemlerin çözümüne başlamadan önce çözülecek diferansiel denklemin hangi tipte olduğunu belirtmek gerekir. Şimdi, aşağıda çeşitli tipte birinci mertebeden diferansiel denklemlerin çözümlerini inceliyeceğiz.

21.2 - 1. Değişkenlere ayrılabilen tipte diferansiel denklemler.

$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$ şeklindeki bir diferansiel denklem

$$f(x)\, dx + \varphi(y)\, dy = 0$$

şekline dönüştürülebiliyorsa *değişkenlere ayrılabilen tipte diferansiel denklem* adını alır.

$f(x)\,dx + \varphi(y)\,dy = 0$ denkleminin her terimi yalnız bir değişken ve bu değişkenin diferansielini içerdiğinden terim terim integral alınabilir. Bu halde

$$\int f(x)\,dx + \int \varphi(y)\,dy = c$$

veya

$$F(x) + \phi(y) = c$$

çözümü elde edilir.

ÖRNEK 1. $\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = 0$ diferansiel denklemini çözünüz.

Bu denklemin her iki tarafını dx ile çarpar y ye bölersek

$$\frac{dy}{y} + \cos x\,dx = 0$$

denklemi elde edilir. Bu ise değişkenlere ayrılmış bir denklem olup terim terim integral alınırsa

$$\int \frac{dy}{y} + \int \cos x\,dx = c$$

$$\log y + \sin x = c$$

veya

$$\log y + \sin x = \log k$$

$$\log \frac{y}{k} = -\sin x \quad , \quad y = k\,e^{-\sin x}$$

bulunur.

ÖRNEK 2. $e^{x^2}\sec y\,dx + \dfrac{1}{x}\sin y\,dy = 0$ diferansiel denklemini çözünüz.

Denklemin her iki tarafı x ile çarpılır $\sec y$ ye bölünürse

$$x\, e^{x^2}\, dx + \sin y \cos y\, dy = 0$$

elde edilir. Değişkenlere ayrılmış olan bu denklemde terim terim integral alınırsa

$$e^{x^2} + \sin^2 y = c$$

elde edilir.

ÖRNEK 3. Bir ülkenin nüfusu 50 yılda iki katına çıkıyor. Nüfusun artma hızı, nüfusla orantılı olduğuna göre, bu ülkenin nüfusu kaç yıl sonra üç katı olur?

t zamanındaki nüfus x ; $t = 0$ anındaki nüfus da x_0 olsun. dt zamanındaki nüfus artımı dx ise, artma hızı $\frac{dx}{dt}$ olur. Buna göre

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad , \quad \frac{dx}{x} = k\, dt \quad ;$$

$$\log \frac{x}{c} = kt \quad , \quad x = c\, e^{kt}$$

dir. $t = 0$ anında $x = x_0$ olup $c = x_0$ dır. O halde

$$x = x_0\, e^{kt}$$

dir. $t = 50$ için $x = 2x_0$ olduğuna göre

$$2x_0 = x_0\, e^{50k} \quad ; \quad e^{50k} = 2$$

ve t anında $x = 3x_0$. olması istendiğine göre

$$3x_0 = x_0\, e^{kt} \quad ; \quad e^{kt} = 3$$

dır. Bunlardan

$$3^{50} = e^{50kt} = (e^{50k})^t = 2^t$$

ve

$$t \log_{10} 2 = 50 \log_{10} 3 \quad ;$$

$$t = 50 \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} = 50 \frac{0,477}{0,301} \cong 79 \text{ yıl}$$

bulunur.

21.2 - 2. Homojen tip diferansiel denklemler.

Tanım 1. Her x için

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

ise, $f(x, y)$ fonksiyonu x ve y değişkenlerine göre n. dereceden homojen bir fonksiyondur denir.

Örneğin, $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ fonksiyonu x ve y ye göre birinci dereceden homojendir. Çünkü

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{\lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3} = \lambda \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \lambda f(x, y)$$

dir.

Tanım 2. $f(x, y)$ fonksiyonu x ve y ye göre sıfırıncı dereceden homojen ise

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

diferansiel denklemi homojen tip diferansiel denklem adını alır.

Böyle bir homojen denklem için

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y) = f(x, y)$$

dır. $\lambda = \frac{1}{x}$ seçelim. Bu takdirde

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

elde edilir. Bu da bize sıfırıncı dereceden homojen bir fonksiyonun yalnız $\frac{y}{x}$ e bağlı olduğunu gösterir. Buna göre $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ denklemi

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu denklemde $\frac{y}{x} = u$ yani $y = u\,x$ dönüştürmesi yapılırsa

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

elde edilerek denklem

$$u + x\,\frac{du}{dx} = f(1, u)$$

şeklini alır. Bu ise değişkenlere ayrılabilen tipte bir denklemdir. Gerçekten u yu ikinci tarafa geçirelim ve her iki tarafı dx ile çarpalım, bu suretle

$$x\,du = [f(1\,, u) - u]\,dx$$

elde edilir. Şimdi de her iki tarafı

$$x[f(1\,, u) - u]$$

ile bölersek

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}$$

ve her iki tarafın integralini alırsak

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \log x + c$$

bulunur. İntegral alma işlemi yapıldıktan sonra u yerine $\frac{y}{x}$ konursa denklemin genel çözümü elde edilmiş olur.

İHTAR. $M(x\,,y)\,dx + N(x\,,y)\,dy = 0$ *denklemindeki* $M(x\,,y)$, $N(x\,,y)$ *fonksiyonları aynı dereceden homojen fonksiyonlar iseler denklem homojen tip'de diferansiel denklemdir.*

ÖRNEK 1. $(x^3 + y^3)\,dx - 3xy^2\,dy = 0$ diferansiel denklemini çözünüz.

$x^3 + y^3$ ve $-3xy^2$ fonksiyonları x ve y ye göre üçüncü dereceden homojen olup denklem homojen tiptedir.

$\frac{y}{x} = u$ dönüştürmesi yapılırsa

$$y = u\,x \quad , \quad dy = u\,dx + x\,du$$

olarak denklem

$$(x^3 + u^3x^3)\,dx - 3xu^2x^2\,(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$(1 + u^3)\,dx - 3u^2(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$(1 - 2u^3)\,dx - 3u^2x\,du = 0$$

şeklini alır. Bu da değişkenlere ayrılabilen tip olup her iki taraf $x(1 - 2u^3)$ ile bölünürse

$$\frac{dx}{x} - \frac{3u^2\,du}{1 - 2u^3} = 0$$

ve terim terim integral alınırsa

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{3u^2\,du}{1 - 2u^3} = k$$

$$\log x + \frac{1}{2}\log(1 - 2u^3) = k$$

$$\log x^2(1 - 2u^3) = 2k = \log c$$

$$x^2(1 - 2u^3) = c$$

bulunur. Bu ifadede u yerine $\frac{y}{x}$ yazılırsa denklemin genel çözümü olarak

$$x^2\left(1 - 2\,\frac{y^3}{x^3}\right) = c$$

$$x^3 - 2y^3 = cx$$

elde edilir.

ÖRNEK 2. $(1+2e^{x/y})\,dx + 2e^{x/y}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy = 0$ diferansiel denklemini çözünüz.

$M(x,y)$ ve $N(x,y)$ fonksiyonları $\dfrac{x}{y}$ cinsinden ifade edilmiş olduklarından denklem homojen tipdir.

$\dfrac{x}{y} = u$ dönüştürmesi yapılırsa

$$x = u\,y \quad , \quad dx = u\,dy + y\,du$$

olarak denklem

$$(1+2e^{u})(u\,dy + y\,du) + 2e^{u}(1-u)\,dy = 0$$

$$(u+2e^{u})\,dy + (1+2e^{u})\,y\,du = 0$$

şeklini alır. Bu da değişkenlere ayrılabilen tip olup her iki taraf $y(u+2e^{u})$ ile bölünürse

$$\frac{dy}{y} + \frac{1+2e^{u}}{u+2e^{u}}\,du = 0$$

ve terim terim integral alınırsa

$$\int\frac{dy}{y} + \int\frac{1+2e^{u}}{u+2e^{u}}\,du = k$$

$$\log y + \log(u+2e^{u}) = \log c$$

$$\log y(u+2e^{u}) = \log c$$

$$y(u+2e^{u}) = c$$

bulunur. Bu ifadede u yerine $\dfrac{x}{y}$ yazılırsa denklemin genel çözümü olarak

$$x + 2y\,e^{x/y} = c$$

elde edilir.

21.2 - 3. $(a_1x + b_1y + c_1)\,dx + (a_2x + b_2y + c_2)\,dy = 0$ **Diferansiel denklemi.**

$c_1 = c_2 = 0$ ise denklem homojen tipde bir denklem olur. Şimdi c_1 ve c_2 nin her ikisinin de sıfır olmadıklarını kabul edelim. Bu takdirde denklemi homojen tipe dönüştürecek bir yol izleyeceğiz. Bunun için de denklemde

$$x = x_1 + h \quad , \quad y = y_1 + k$$

dönüştürmelerini yapalım. Bu halde

$$dx = dx_1 \quad , \quad dy = dy_1$$

olarak denklem

$$(a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1)\,dx_1 + (a_2x_1 + b_2y_1 + a_2h + b_2k + c_2)\,dy_1 = 0$$

şeklini alır. Şimdi de h ve k yı

$$a_1h + b_1k + c_1 = 0$$

$$a_2h + b_2k + c_2 = 0$$

olacak şekilde seçersek, denklem

$$(a_1x_1 + b_1y_1)\,dx_1 + (a_2x_1 + b_2y_1)\,dy_1 = 0$$

şeklini alır ki, bu da homojen tipte bir denklemdir.

Eğer $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ise yukarıdaki cebirsel denklem sisteminin bir çözüm takımı yoktur. Yani böyle bir halde $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$ dönüştürmesini yapamayız.

Bu halde $a_1b_2 = a_2b_1$ veya $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{b_2}{b_1} = m$ ve $a_2 = ma_1$, $b_2 = mb_1$ olarak diferansiel denklem

$$[(a_1x + b_1y) + c_1]\,dx + [m(a_1x + b_1y) + c_2]\,dy = 0$$

şekline girer. Burada $a_1x + b_1y = u$ dönüştürmesi yapılırsa denklem, değişkenlere ayrılabilen tipte bir denklem haline gelir. Gerçekten

$$du = a_1\,dx + b_1\,dy \qquad \text{ve} \qquad dy = \frac{du - a_1\,dx}{b_1}$$

olarak denklemde yerlerine konursa

$$b_1(u + c_1)\,dx + (mu + c_2)(du - a_1dx) = 0$$

$$[(b_1 - a_1m)\,u + b_1c_1 - a_1c_2]\,dx + (mu + c_2)\,du = 0$$

$$(Au + B)\,dx + (mu + c_2)\,du = 0$$

elde edilir ki bu da değişkenlere ayrılabilen tiptir.

ÖRNEK 1. $(x - y - 1)\,dx + (x + 4y - 1)\,dy = 0$ diferansiel denklemini çözünüz.

$$x = x_1 + h \quad , \quad y = y_1 + k \quad , \quad dx = dx_1 \quad , \quad dy = dy_1$$

dönüştürmeleri yapılırsa denklem

$$(x_1 - y_1 + h - k - 1)\,dx_1 + (x_1 + 4y_1 + h + 4k - 1)\,dy_1 = 0$$

şeklini alır. h ve k

$$h - k - 1 = 0 \quad , \quad h + 4k - 1 = 0$$

olacak şekilde yani $h = 1$, $k = 0$ olarak seçilirse

$$x_1 = x - 1 \quad , \quad y_1 = y$$

olarak denklem

$$(x_1 - y_1)\,dx_1 + (x_1 + 4y_1)\,dy_1 = 0$$

şeklinde homojen tipte bir denkleme dönüşür.

Bu denklemi çözmek için de $y_1 = ux_1$ dönüştürmesi yapılırsa $dy_1 = u\,dx_1 + x_1du$ olarak

$$(x_1 - ux_1)\, dx_1 + (x_1 + 4ux_1)\,(u\, dx_1 + x_1\, du) = 0$$

$$(4u^2 + 1)\, dx_1 + x_1(1 + 4u)\, du = 0$$

şeklinde değişkenlere ayrılabilen tipte bir denkleme varılır. Bu denklemin her iki tarafı $x_1(4u^2 + 1)$ ifadesine bölünürse

$$\frac{dx_1}{x_1} + \frac{1 + 4u}{4u^2 + 1}\, du = 0$$

ve terim terim integral alınırsa

$$\log x_1 + \int \frac{4u\, du}{4u^2 + 1} + \int \frac{du}{4u^2 + 1} = k$$

$$\log x_1 + \frac{1}{2} \log (4u^2 + 1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2u = k \quad ,$$

ve $x_1 = x - 1$, $y_1 = y$, $u = \dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y}{x - 1}$ olduğu gözönüne alınırsa

$$2 \log (x - 1) + \log \left[\frac{4y^2}{(x - 1)^2} + 1\right] + \operatorname{arctg} \frac{2y}{x - 1} = c$$

$$\log (4y^2 + x^2 - 2x + 1) + \operatorname{arctg} \frac{2y}{x - 1} = c$$

bulunur.

ÖRNEK 2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$ diferansiel denklemini çözünüz.

$\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{b_2}{b_1} = -2$ olarak $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$ dönüştürmesi yapılamaz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y - 1}{2(2x + y) + 5}$$

olup $2x + y = u$ dönüştürmesi yapılırsa

$$2 + \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \quad , \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 2$$

olarak denklem

$$\frac{du}{dx} - 2 = \frac{u-1}{2u+5}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u-1}{2u+5} + 2 = \frac{5u+9}{2u+5}$$

şekline girer. Bu da değişkenlere ayrılabilen tipte bir denklem olup değişkenlere ayrılırsa

$$\frac{2u+5}{5u+9}\,du = dx$$

ve her iki tarafın integrali alınırsa

$$x + c = \frac{2}{5}\,u + \frac{7}{25}\log(5u+9)$$

bulunur. $u = 2x + y$ olduğu da hatırlanırsa denklemin genel çözümü olarak

$$\frac{2}{5}(2x+y) + \frac{7}{25}\log(10x+5y+9) = x + c$$

elde edilir.

21.2 - 4. Birinci mertebeden lineer diferansiel denklemler.

Bilinmiyen y fonksiyonu ve bu fonksiyonun türevine göre lineer olan

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)}$$

şeklindeki denkleme *birinci mertebeden lineer diferansiel denklem* denir. Denklemdeki $P(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonları x in sürekli fonksiyonlarıdır.

$Q(x) \equiv 0$ ise denkleme *birinci mertebeden ikinci tarafsız lineer denklem* denir. Bu halde denklem, değişkenlere ayrılabilen tipte olup

kolayca çözülebilir. Gerçekten

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = 0$$

$$\frac{dy}{y} + P(x)\,dx = 0$$

olup terim terim integral alınırsa :

$$\log y + \int P(x)\,dx = \log c$$

$$\log \frac{y}{c} = -\int P(x)\,dx$$

$$y = c\,e^{-\int P(x)\,dx}$$

bulunur.

$Q(x) \neq 0$ ise denklem, *birinci mertebeden ikinci taraflı lineer denklem* adını alır. Bu denklemin çözümü için iki yol göstereceğiz.

Birinci yol : Bu halde

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$

denkleminin çözümünü, x in iki fonksiyonunun

$$y = u(x)\,v(x)$$

şeklindeki çarpımı şeklinde düşünerek arayacağız. Bu takdirde u ve v gibi öyle iki fonksiyon aramak gerekecektir ki bunların çarpımları, çözümü aranan diferansiel denklemi sağlıyacaktır. İki bilinmiyen için bir şart ileri sürülmüş olduğuna göre ikinci bir şartı keyfi olarak ileri sürmek mümkün olabilecektir. Bunlara göre $y = u\,v$ nin denklemi sağlama şartını yazmak üzere

$$\frac{dy}{dx} = u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx}$$

olduğunu gözönüne alır ve denklemde yerlerine koyarsak

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + P u v = Q$$

veya

$$u \left(\frac{dv}{dx} + P v \right) + v \frac{du}{dx} = Q \tag{1}$$

elde edilir. Şimdi ileri sürebileceğimiz keyfi şart olarak, v fonksiyonunun

$$\frac{dv}{dx} + P v = 0$$

olacak şekilde seçilmesini düşünelim. Bu denklem, değişkenlere ayrılabilen bir diferansiel denklem olup

$$\frac{dv}{v} + P \, dx = 0$$

$$\log \frac{v}{c_1} = - \int P \, dx$$

$$v = c_1 \, e^{- \int P \, dx} \tag{2}$$

bulunur.

v nin bulunan bu değeri (1) denkleminde yerine konursa

$$c_1 \, e^{- \int P \, dx} \frac{du}{dx} = Q$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{c_1} Q \, e^{\int P \, dx}$$

$$u = \frac{1}{c_1} \int Q \, e^{\int P \, dx} \, dx + c_2 \tag{3}$$

elde edilir. (2) ve (3) ün bu değerleri de $y = u v$ bağıntısında yerlerine konursa denklemin genel çözümü olarak

$$y = c_1 \, e^{- \int P \, dx} \left[\frac{1}{c_1} \int Q \, e^{\int P \, dx} \, dx + c_2 \right]$$

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\, dx + c\right]$$

bulunur.

ÖRNEK 1. $\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = \sin x \cos x$ diferansiel denklemini çözünüz.

$y = u\,v$ dönüştürmesi yapılırsa

$$\frac{dy}{dx} = u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx}$$

olarak denklem

$$u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx} + u\,v\cos x = \sin x \cos x$$

$$u\left(\frac{dv}{dx} + v\cos x\right) + v\,\frac{du}{dx} = \sin x \cos x \tag{1}$$

şeklini alır. Şimdi de v fonksiyonunu

$$\frac{dv}{dx} + v\cos x = 0$$

olacak şekilde seçelim. Bu halde

$$\frac{dv}{v} + \cos x\, dx = 0$$

$$\log v = -\sin x$$

olarak

$$v = e^{-\sin x}$$

bulunur. v nin bu ifadesini (1) de yerine koyarsak

$$e^{-\sin x}\,\frac{du}{dx} = \sin x \cos x$$

$$du = e^{\sin x}\sin x \cos x\, dx$$

$$u = \int e^{\sin x} \sin x \cos x \, dx + c$$

$$u = \sin x \, e^{\sin x} - e^{\sin x} + c$$

$$u = e^{\sin x} (\sin x - 1) + c$$

elde edilir. u ve v nin bu ifadeleri de $y = u\,v$ bağıntısında yerlerine konursa denklemin genel çözümü olarak

$$y = u\,v = e^{-\sin x} [e^{\sin x}(\sin x - 1) + c]$$

$$y = \sin x - 1 + c\,e^{-\sin x}$$

bulunur.

İkinci yol : **Sabitin değişimi kuralı.**

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$

denklemini bu kuralla çözmek için evvela ikinci tarafsız denklem çözülür. İkinci tarafsız denklem

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = 0$$

olup çözümü yukarıda

$$y = c\,e^{-\int P(x)\,dx}$$

olarak bulunmuştu. c bir sabit olduğuna göre bu çözüm, ikinci tarafsız denklemin çözümüdür. Şimdi de bu ifadenin ikinci taraflı denklemin çözümü olabilmesi için, c nin nasıl bir $c(x)$ fonksiyonu olması gerektiğini araştıralım. Bunun için de $c = c(x)$ olduğuna göre

$$y = c(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}$$

in ikinci taraflı denklemi sağlama şartını yazalım. Buradan

$$\frac{dy}{dx} = e^{-\int P\,dx}\frac{dc}{dx} - c\,P\,e^{-\int P\,dx}$$

olduğu gözönüne alınır ve y ile birlikte ikinci taraflı denklemde yerlerine konursa

$$e^{-\int P\,dx}\frac{dc}{dx} - cP\,e^{-\int P\,dx} + cP\,e^{-\int P\,dx} = Q$$

$$e^{-\int P\,dx}\frac{dc}{dx} = Q$$

$$\frac{dc}{dx} = Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}$$

$$c = \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx + k$$

bulunur. c nin bu değeri $y = c\,e^{-\int P\,dx}$ ifadesinde yerine konursa ikinci taraflı denklemin genel çözümü olarak

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx + k\right]}$$

elde edilir ki bu sonucun, birinci yolla elde edilen sonucun aynı olduğu kolayca görülür.

ÖRNEK 2. $x^2 \log x\,\frac{dy}{dx} + xy = 1$ denklemini çözünüz.

Denklem

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x\log x} = \frac{1}{x^2\log x}$$

şeklinde yazılırsa lineer ve ikinci taraflı bir denklem olduğu kolayca görülür. Sabitin değişimi kuralını uygulamak üzere evvelâ ikinci tarafsız denklemi çözelim. İkinci tarafsız denklem

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x\log x} = 0$$

olup buradan

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x\log x} = 0$$

$$\log y + \log(\log x) = \log c$$

$$y \log x = c \qquad\qquad y = \frac{c}{\log x}$$

bulunur. Şimdi de bulunan $y = \dfrac{c}{\log x}$ in, ikinci taraflı denklemin genel çözümü olabilmesi için c nin nasıl bir $c(x)$ fonksiyonu olması gerektiğini araştıralım.

$$y = \frac{c}{\log x} \qquad \text{den} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log x}\frac{dc}{dx} - \frac{c}{x \log^2 x}$$

elde edilip ikinci taraflı denklemde yerlerine konursa

$$\frac{1}{\log x}\frac{dc}{dx} - \frac{c}{x\log^2 x} + \frac{c}{x \log^2 x} = \frac{1}{x^2 \log x}$$

$$\frac{dc}{dx} = \frac{1}{x^2} \quad , \quad c = -\frac{1}{x} + k$$

bulunur. c nin bu ifadesi $y = \dfrac{c}{\log x}$ de yerine konursa verilen denklemin genel çözümü olarak

$$y = \frac{1}{\log x}\left(-\frac{1}{x} + k\right)$$

$$\frac{1}{x} + y \log x = k$$

bulunur.

21.2 - 5. Bernoulli diferansiel denklemi.

$P(x)$, $Q(x)$ x in sürekli fonksiyonları ve $n \neq 0$, $n \neq 1$ olarak

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)\, y^n}$$

şeklindeki bir denkleme *Bernoulli diferansiel denklemi* denir. Bu denk-

lem, aşağıda açıklayacağımız bir değişken dönüştürmesi ile lineer bir diferansiel denkleme dönüştürülebilir.

Denklemin her iki tarafı y^n ile bölünürse

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)\,y^{-n+1}=Q(x)$$

elde edilir. Bu denklemde

$$\boxed{u=y^{1-n}}$$

dönüştürmesi yapılırsa

$$\frac{du}{dx}=(1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

olarak

$$\frac{du}{dx}+(1-n)\,P(x)\,u=(1-n)\,Q(x)$$

denklemine varılır ki bu da birinci mertebeden lineer diferansiel denklemdir. Bu denklemin genel çözümü bulunup u yerine y^{1-n} konursa, Bernoulli diferansiel denkleminin genel çözümü elde edilmiş olur.

ÖZET. $n \neq 0$ ve $n \neq 1$ olarak

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x)\,y^n$$

Bernoulli diferansiel denklemini çözmek için, $u=y^{1-n}$ değişken dönüştürmesi yapılarak u yu bilinmiyen kabul eden bir lineer diferansiel denkleme varılır.

ÖRNEK. $xy'+y=y^2\log x$ denklemini çözünüz.

Her iki tarafı xy^2 ile bölersek

$$y^{-2}y'+\frac{y^{-1}}{x}=\frac{\log x}{x}$$

ve $u=y^{-1}$ dönüştürmesini yaparsak

$$\frac{du}{dx} = - y^{-2} \frac{dy}{dx}$$

olarak

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = - \frac{\log x}{x}$$

lineer diferansiel denklemi elde edilir. Bu denklemi çözmek için de sabitin değişimi kuralını uygulayalım. İkinci tarafsız denklem

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0$$

olup genel çözümü

$$\frac{du}{u} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\log u - \log x = \log c$$

$$u = cx$$

dir. Şimdi de bu ifadenin ikinci taraflı lineer denklemin genel çözümü olabilmesi için c nin nasıl bir $c(x)$ fonksiyonu olması gerektiğini araştıralım.

$$u = cx \qquad \text{ve} \qquad \frac{du}{dx} = x \frac{dc}{dx} + c$$

olarak denklemde yerlerine konursa

$$x \frac{dc}{dx} + c - c = - \frac{\log x}{x}$$

$$\frac{dc}{dx} = - \frac{\log x}{x^2}$$

$$c = \int - \frac{1}{x^2} \log x \, dx + k$$

$$c = \frac{1}{x} \log x + \frac{1}{x} + k$$

bulunur. c nin bu ifadesini $u = cx$ de yerine koyarsak

$$u = \log x + 1 + kx$$

ve $u = y^{-1}$ olduğunu gözönüne alırsak verilen Bernoulli denkleminin genel çözümü olarak

$$\frac{1}{y} = \log x + kx + 1$$

elde edilir.

21.2 - 6. Tam diferansiel tipi denklemler.

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

denklemindeki $M(x, y)$, $N(x, y)$ fonksiyonları

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

bağıntısını sağlıyorlarsa bu denkleme *tam diferansiel tipi denklem* denir.

$M(x, y)$, $N(x, y)$ fonksiyonları $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ şartını gerçekleştiriyorlarsa $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$ denkleminin birinci tarafı, $u(x, y)$ şeklindeki bir fonksiyonun toplam diferansieli olur. Bu takdirde denklem

$$d\, u(x, y) = 0$$

şeklinde olup genel çözümü

$$u(x, y) = c$$

şeklindedir.

$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$ denkleminin birinci tarafının, bir $u(x, y)$ fonksiyonunun toplam diferansieli olduğunu farzedelim. Bu takdirde

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy$$

yazılıp buradan da

$$M(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad N(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$$

olduğu görülür.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$$

den

$$u(x, y) = \int_a^x M(x, y)\, dx + F(y)$$

yazılabilir. $\frac{\partial u}{\partial x}$ in hesabında y sabit farzedildiğinden x e göre integralde, ortaya çıkacak integral sabitinin y nin $F(y)$ gibi bir fonksiyonu olması icap eder. Bu suretle ortaya çıkan $F(y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$$

eşitliğinden faydalanarak hesaplanır. Gerçekten $u(x, y)$ ifadesinin her iki tarafının y ye göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial M}{\partial y}\, dx + F'(y) = N(x, y)$$

bulunur. Halbuki

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olup

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial N}{\partial x}\, dx + F'(y) = N(x, y)$$

$$\Big| N(x, y) \Big|_a^x + F'(y) = N(x, y)$$

$$N(x, y) - N(a, y) + F'(y) = N(x, y)$$

$$F'(y) = N(a, y)$$

elde edilir. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$F(y) = \int_b^y N(a, y)\,dy$$

bulunur. $F(y)$ nin bu ifadesini $u(x, y)$ de yerine koyarsak

$$u(x, y) = \int_a^x M(x, y)\,dx + \int_b^y N(a, y)\,dy$$

elde edilir. Buna göre diferansiel denklemin genel çözümü

$$u(x, y) = c$$

$$\int_a^x M(x, y)\,dx + \int_b^y N(a, y)\,dy = c$$

dir.

ÖZET. $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ olarak $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ diferansiel denkleminin genel çözümü

$$\boxed{\int_a^x M(x, y)\,dx + \int_b^y N(a, y)\,dy = c}$$

dir.

İHTAR. Nümerik örneklerde, bu formül kullanılmadan, toplam diferansiel tanımından faydalanarak ta, genel çözüm bulunabilir.

ÖRNEK 1. $\cos y\,dx + (2y - x\sin y)\,dy = 0$ diferansiel denklemini çözünüz.

$$M(x, y) = \cos y \quad , \quad N(x, y) = 2y - x\sin y$$

olup

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\sin y \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\sin y$$

olarak

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olduğu görülür. O halde denklem tam diferansiel tipi olup genel çözümü

$$u(x, y) = c$$

şeklindedir.

$$M(x.y) = \frac{\partial u}{\partial x} = \cos y$$

den

$$u(x, y) = \int \cos y \, dx + F(y) = x \cos y + F(y)$$

olup, $F(y)$ yi bulmak üzere y ye göre türev alınır ve $N(x, y)$ ye eşitlenirse

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x \sin y + F'(y) = N(x, y) = 2y - x \sin y$$

$$F'(y) = 2y \quad , \quad F(y) = y^2 + k$$

elde edilir. O halde aranan $u(x, y)$ fonksiyonu

$$u(x, y) = x \cos y + y^2 + k$$

ve diferansiel denklemin genel çözümü

$$x \cos y + y^2 = c$$

dir.

ÖRNEK 2. $\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$ denklemini çözünüz.

$$M(x, y) = \frac{2x}{y^3} \quad , \quad N(x, y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

ve

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}$$

olup

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

şartı gerçekleşmektedir. O halde denklemin birinci tarafı $u(x, y)$ şeklindeki bir fonksiyonun toplam diferansielidir. $u(x, y)$ fonksiyonunu bulmak üzere yukarıda çıkarılan

$$u(x,y) = \int_a^x M(x,y)\,dx + \int_b^y N(a,y)\,dy$$

formülünü verilen denkleme uygularsak

$$u(x,y) = \int_a^x \frac{2x}{y^3}\,dx + \int_b^y \frac{y^2 - 3a^2}{y^4}\,dy$$

$$u(x,y) = \left| \frac{x^2}{y^3} \right|_a^x + \left| -\frac{1}{y} + \frac{a^2}{y^3} \right|_b^y$$

$$u(x,y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{a^2}{y^3} - \frac{1}{y} + \frac{a^2}{y^3} + \frac{1}{b} - \frac{a^2}{b^3}$$

$$u(x,y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + k$$

bulunur. Buna göre diferansiel denklemin genel çözümü

$$u(x,y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c$$

dir.

21.2 - 7. Integrasyon çarpanı.

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

diferansiel denkleminin birinci tarafı bir tam diferansiel olmasın. Birçok defa, bu denklemin birinci tarafının $\mu(x, y)$ gibi bir fonksiyonla çarpılması halinde, birinci tarafın bir tam diferansiel haline gelmesi mümkündür. Bu takdirde elde edilen denklemin çözümü ile verilen denk-

lemin genel çözümleri aynı olur. Bu şekilde ortaya atılan $\mu(x, y)$ fonksiyonuna $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ denkleminin *integrasyon çarpanı* denir.

$\mu(x, y)$ gibi bir integrasyon çarpanını bulmak için aşağıdaki gibi hareket edilir. Denklemin her iki tarafı bilinmiyen $\mu(x, y)$ integrasyon çarpanı ile çarpılır.

$$\mu M\, dx + \mu N\, dy = 0$$

Bu suretle elde edilen denklemin bir tam diferansiel tipi denklem, yani

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

olması ve dolayısile

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

şartının gerçekleşmesi gerekir. Elde edilen son bağıntının her iki tarafı μ ile bölünürse

$$M \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

veya

$$M \frac{\partial \log \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \log \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \tag{1}$$

elde edilir. Aşikârdır ki (1) denklemini sağlıyan her $\mu(x,y)$ fonksiyonu $M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0$ denkleminin bir integrasyon çarpanıdır. (1) denklemi, $\mu(x,y)$ yi bilinmiyen kabul eden bir kısmi türevli denklemdir. Bu denklemin, verilen şartlar içinde, sonsuz sayıda çözümü vardır. O halde $M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0$ denkleminin sonsuz sayıda integrasyon çarpanı vardır. Genel halde (1) den $\mu(x,y)$ yi bulmak güçtür. Ancak, özel hallere gitmek suretiyle $\mu(x,y)$ fonksiyonunu bulmak mümkündür.

Örneğin, $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ denkleminin yalnız y ye tabi bir integrasyon çarpanı kabul ettiğini farzedelim. Bu takdirde

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial x} = 0$$

olup μ,

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M} = f(y)$$

diferansiel denkleminden evvelâ $\log \mu$ ve sonra da μ olarak bulunabilir. Buna göre,

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

ifadesi yalnız y nin bir fonksiyonu ise, bu ifadeden x e tabi olmayan bir integrasyon çarpanı bulunabilir.

Aynı şekilde

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{N}$$

ifadesi y ye tabi olmayıp yalnız x in fonksiyonu ise, x e bağlı bir integrasyon çarpanı kolayca bulunabilir.

ÖRNEK 1. $(y + xy^2)\,dx - x\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

$$M(x\,,y) = y + xy^2 \quad , \quad N(x\,,y) = -x$$

olup

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

dir. Bunlara göre verilen denklemin birinci tarafı bir tam diferansiel değildir. Bu denklemin yalnız y ye tabi olan bir integrasyon çarpanını arıyalım.

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-1-1-2xy}{y+xy^2} = -\frac{2}{y}$$

olup

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial y} = -\frac{2}{y} \quad ; \quad \log \mu = -2\log y \quad ; \quad \mu = \frac{1}{y^2}$$

bulunur. Verilen denklemin her terimi $\mu = \dfrac{1}{y^2}$ ile çarpılırsa

$$\left(\frac{1}{y} + x\right) dx - \frac{x}{y^2}\, dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y} + x\right) = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

olarak denklem tam diferansiel tipindedir. Bu denklem çözülürse, verilen denklemin genel çözümü olarak

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + c = 0 \quad \text{veya} \quad y = -\frac{2x}{x^2+k}$$

bulunur.

ÖRNEK 2. $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ lineer denklemini integrasyon çarpanı yardımı ile çözünüz.

Denklem

$$[P(x)\, y - Q(x)]\, dx + dy = 0$$

şeklinde yazılırsa

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = P(x) = \frac{\partial \log \mu}{\partial x}$$

$$\log \mu = \int P(x)\, dx \quad ; \quad \mu = e^{\int P(x)\, dx}$$

bulunur. O halde $\mu = e^{\int P(x)\,dx}$ lineer diferansiel denklemin bir integrasyon çarpanıdır. Denklemin her terimini bu ifade ile çarparsak

$$e^{\int P(x)\,dx} \frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)\,dx} P(x)\,'y = e^{\int P(x)\,dx} Q(x)$$

$$\frac{d}{dx}(y\, e^{\int P(x)\,dx}) = e^{\int P(x)\,dx} Q(x)$$

$$y\, e^{\int P(x)\,dx} = \int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx + c$$

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx + c\right]$$

bulunur.

Bu ifadenin, 21.2-4 de elde edilen çözümle aynı olduğu kolayca görülür. O halde bu örnek, lineer diferansiel denklemin çözümü için üçüncü bir yolu vermiş bulunmaktadır.

21.2 - 8. Clairaut diferansiel denklemi.

$$\boxed{y = x\frac{dy}{dx} + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

şeklindeki bir denkleme *Clairaut denklemi* denir. Bu denklemi çözmek için

$$\frac{dy}{dx} = p$$

dönüştürmesi yapılır. Bu takdirde denklem

$$y = xp + \varphi(p)$$

şeklini alır. Bu denklemin her iki tarafının türevi alınır ve $\frac{dy}{dx}$ yerine p konursa

$$p = x \frac{dp}{dx} + p + \varphi'(p) \frac{dp}{dx}$$

veya

$$[x + \varphi'(p)] \frac{dp}{dx} = 0$$

bulunur. Herbir çarpan ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse

$$\frac{dp}{dx} = 0 \qquad x + \varphi'(p) = 0$$

denklemleri elde edilir.

$\frac{dp}{dx} = 0$ dan $p = c$ çözümü bulunur. p nin bu ifadesi

$$y = xp + \varphi(p)$$

denkleminde yerine konursa

$$\boxed{y = cx + \varphi(c)}$$

genel çözümü elde edilir. Bu çözüm geometrik olarak bir doğru ailesi gösterir.

İkinci denklem olan $x + \varphi'(p) = 0$ denkleminden p, x in fonksiyonu olarak çözülür ve

$$y = xp + \varphi(p)$$

denkleminde yerine konursa

$$\boxed{y = xp(x) + \varphi[p(x)]}$$

elde edilir ki bu da Clairaut denkleminin çözümüdür. Ancak bu çözüm genel çözümden elde edilebilecek bir çözüm olmayıp *tekil çözümdür*. Bu çözüm, genel çözümü teşkil eden doğru ailesinin zarfı olup, zarfın parametrik denklemlerini veren

$$y = xp + \varphi(p)$$

$$x + \varphi'(p) = 0$$

denklemlerinden, p yi parametre kabul etmek suretile de elde edilebilir.

ÖZET. 1) $y = y'x + \varphi(y')$ Clairaut denkleminin genel çözümü, bu denklemdeki y' ler yerine bir c keyfi sabiti koymak suretile elde edilir. Buna göre genel çözüm

$$\boxed{y = cx + \varphi(c)}$$

dir.

2) $y = y'x + \varphi(y')$ Clairaut denkleminin tekil çözümü ise

$$y = cx + \varphi(c)$$

genel çözümü ile bu denklemin her iki tarafının c ye göre türevini almak suretile bulunan

$$x + \varphi'(c) = 0$$

denklemlerinden c yi yok etmek suretile elde edilir.

ÖRNEK. $y = xy' + y' - y'^2$ denklemini çözünüz.

Denklem, Clairaut denklemi olup genel çözümü

$$y = cx + c - c^2$$

dir. Tekil çözüm ise, bu çözüm ile bunun c ye göre türevini almak suretile elde edilecek

$$x + 1 - 2c = 0$$

denklemlerinden c yi yokederek bulunur. Gerçekten

$$x + 1 - 2c = 0 \qquad \text{dan} \qquad c = \frac{1}{2}(x + 1)$$

olup $y = cx + c - c^2$ de yerine konursa

$$y = \frac{1}{2}(x+1)\,x + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{4}(x+1)^2$$

$$y = \frac{1}{4}(x+1)^2$$

elde edilir.

21.2 - 9. Lagrange denklemi.

$$\boxed{y = x\,\varphi(y') + \psi(y')}$$

şeklindeki bir denkleme *Lagrange denklemi* denir. Bu denklem x ve y ye göre lineerdir. Bundan evvel incelediğimiz Clairaut denklemi, Lagrange denkleminin, $\varphi(y') = y'$ olması halidir.

Lagrange denklemi de $y' = p$ dönüştürmesi ile çözülebilir. Bu takdirde denklem,

$$y = x\,\varphi(p) + \psi(p)$$

şeklini alır. Bu denklemin her iki tarafının x e göre türevi alınırsa

$$y' = \varphi(p) + [x\,\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}$$

$$p - \varphi(p) = [x\,\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} \tag{1}$$

elde edilir.

Bu denklemin bazı çözümleri hemen bulunabilir. Gerçekten p nin $p = p_0$ gibi bütün sabit değerleri için

$$p_0 - \varphi(p_0) = 0$$

olmak şartiyle, denklem sağlanır. $p = p_0 = st$ olunca $\frac{dp}{dx} = 0$ olur.

Buna karşılık olan çözümü bulmak için verilen denklemde $p = p_0$ yapmak yeterlidir. Buna göre

$$y = x\,\varphi(p_0) + \psi(p_0)$$

elde edilir. Bu çözüm genel çözümden elde edilemiyen bir çözüm olduğundan tekil çözümdür.

Genel çözümü elde etmek için yukarıda elde edilen (1) denklemini

$$\frac{dx}{dp} - x\,\frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

şekline sokalım. Bu denklem, x i bilinmiyen kabul eden bir lineer denklem olup, çözülürse

$$x = \gamma(p,c) \qquad (2)$$

elde edilir. $y = x\,\varphi(p) + \psi(p)$ denklemi ile $x = \gamma(p,c)$ den p yok edilirse

$$\phi(x,y,c) = 0$$

şeklindeki genel çözüm bulunur.

ÖRNEK. $y + xy' = y'^3$ diferansiel denklemini çözünüz.

Denklem $y = -xy' + y'^3$ şeklinde olup Lagrange diferansiel denklemidir. Zira $-y' \neq y'$ dir. $y' = p$ dönüştürmesini yapalım. Bu takdirde denklem

$$y + px = p^3$$

şeklini alır. Her iki tarafın x e göre türevini alırsak

$$p + p + xp' = 3p^2p'$$

$$p' = \frac{2p}{3p^2 - x}$$

veya

$$\frac{dx}{dp} + \frac{x}{2p} = \frac{3p}{2}$$

elde edilir. Bu ise x i bilinmiyen kabul eden bir lineer diferansiel denklemdir. Bu denklem çözülürse

$$x = \frac{3}{5} p^2 + \frac{c}{\sqrt{p}}$$

elde edilir. Bunlara göre

$$y + px = p^3$$

$$x = \frac{3}{5} p^2 + \frac{c}{\sqrt{p}}$$

denklemleri, genel çözümün parametrik denklemleridir.

Tekil çözüm için

$$p_0 = \varphi(p_0) = -y'$$

eşitliğini sağlıyan bir p_0 sabit değeri bulmak gerekecektir. Bu eşitliği sağlıyan p_0 değeri ise $p_0 = 0$ dır. Verilen denklemde y' yerine $p_0 = 0$ değeri yazılırsa

$$y = 0$$

tekil çözümü bulunur.

21.3 Değişkenlerden birini içermiyen ikinci mertebeden diferansiel denklemler.

21.3 - 1. $\boxed{\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x)}$ **diferansiel denklemi.**

Bu diferansiel denklemi çözmek için ard arda iki integral almak yeterlidir.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(x)$$

in her iki tarafını dx ile çarparak

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(x)\, dx$$

$$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int f(x)\, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x)\, dx + c_1 = F(x) + c_1$$

$$dy = F(x)\, dx + c_1\, dx$$

$$y = \int F(x)\, dx + c_1 x + c_2$$

elde edilir. Elde edilen sonuç, c_1 ve c_2 gibi iki keyfi sabiti içerdiğinden, genel çözümdür.

ÖRNEK 1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6x = 0$ denklemini çözünüz.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x \quad , \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 6x \quad , \quad d\left(\frac{dy}{dx}\right) = 6x\, dx$$

$$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int 6x\, dx + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + c_1$$

ve

$$dy = 3x^2\, dx + c_1\, dx$$

olup

$$y = x^3 + c_1 x + c_2$$

bulunur.

İHTAR. Bu kural, birinci tarafta daha yüksek mertebeden türev bulunması haline de, yani

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$$

şeklindeki denklemlere de uygulanır.

ÖRNEK 2. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = x\, e^x$ denklemini çözünüz.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = x\, e^x \quad ; \quad d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = x\, e^x\, dx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int x\, e^x\, dx + c_1 = x\, e^x - e^x + c_1$$

ve

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x\, e^x - e^x + c_1$$

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = x\, e^x\, dx - e^x\, dx + c_1\, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \int x\, e^x\, dx - \int e^x\, dx + c_1 x + c_2$$

$$= x\, e^x - 2e^x + c_1 x + c_2$$

olup

$$y = x\, e^x - 3e^x - \frac{1}{2}\, c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

bulunur.

21.3 - 2. $\boxed{\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(y)}$ diferansiel denklemi.

Bu diferansiel denklemin çözümünü bulmak için evvelâ, denklemin her iki tarafı

$$2\,\frac{dy}{dx}\, dx$$

ile çarpılır. Buna göre

$$2\,\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2}\,dx = 2f(y)\,\frac{dy}{dx}\,dx$$

elde edilir. Bu bağıntının birinci tarafı

$$2\,\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2}\,dx = d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

olup

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2f(y)\,dy$$

ve

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \int 2f(y)\,dy + c = F(y) + c$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{F(y)+c} \quad ; \quad \frac{dy}{\sqrt{F(y)+c}} = dx$$

olarak, buradan $y = \varphi(x,c,k)$ çözümü bulunur.

ÖRNEK. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$ diferansiel denklemini çözünüz.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\,a^2y \quad ; \quad 2\,\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2}\,dx = -\,2a^2y\,dy$$

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -\,2a^2y\,dy \quad ; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -\,2a^2\int y\,dy + K^2$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = K^2 - a^2y^2 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{K^2 - a^2y^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{K^2 - a^2y^2}} = dx \quad ; \quad x + c = \int \frac{dy}{\sqrt{K^2 - a^2y^2}}$$

olup

$$\frac{1}{a}\arcsin\frac{ay}{K} = x + c$$

$$\arcsin\frac{ay}{K} = ax + ac = ax + \varphi$$

$$\frac{ay}{K} = \sin(ax + \varphi) \quad ; \quad y = \frac{K}{a} \sin(ax + \varphi)$$

$$y = M \sin(ax + \varphi)$$

dir. M ve φ keyfi sabitlerdir.

21.3 - 3. $\boxed{\dfrac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \dfrac{dy}{dx}\right)}$ **diferansiel denklemi.**

$\dfrac{dy}{dx} = p$ dönüştürmesi yapılırsa $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx}$ olarak, denklem

$$\frac{dp}{dx} = f(x,p)$$

şeklinde birinci mertebeden bir diferansiel denkleme dönüştürülmüş olur.

ÖRNEK. $(x + 1)\dfrac{d^2y}{dx^2} = (x + 2)\dfrac{dy}{dx}$ diferansiel denkleminin, $x = 0$ için $\dfrac{dy}{dx} = 3$ ve $y = 1$ olması halindeki çözümünü bulunuz.

$\dfrac{dy}{dx} = p$ dönüştürmesi yapılırsa $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx}$ olarak, denklem

$$(x + 1)\frac{dp}{dx} = p(x + 2)$$

şeklinde birinci mertebeden ve değişkenlere ayrılmış tipte bir denkleme dönüşmüş olur. Bu denklemden

$$\frac{dp}{p} = \frac{x + 2}{x + 1}dx = \left(1 + \frac{1}{x + 1}\right)dx$$

$$\log\frac{p}{c} = x + \log(x + 1)$$

$$\log\frac{p}{c(x + 1)} = x \quad ; \quad p = c(x + 1)e^x$$

ve buradan da

$$\mathrm{d}y = c\,(x+1)\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x \qquad ; \qquad y = c\int (x+1)\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$$

$$y = c\,x\,\mathrm{e}^{x} + k$$

bulunur. $x = 0$ için $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p = 3$ ve $y = 1$ olduğuna göre

$$c = 3 \quad , \quad k = 1$$

olarak aranan çözüm

$$y = 3x\,\mathrm{e}^{x} + 1$$

dir.

21.3 - 4. $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = f\left(y, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}$ diferansiel denklemi.

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$ dönüştürmesi yapılır ve

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

olduğu gözönüne alınırsa, denklem

$$p\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f\,(y,p)$$

şeklinde birinci mertebeden bir denkleme dönüşür.

ÖRNEK. $y\,\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3 = 0$ diferansiel denklemini çözünüz.

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$ dönüştürmesi yapılırsa $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = p\,\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$ olarak denklem,

$$p\,y\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 + p^3 = 0$$

$$\frac{dp}{dy} - \frac{p}{y} = -\frac{p^2}{y}$$

şeklinde Bernoulli diferansiel denklemine dönüşür. Bu denklemde de

$$p^{1-2} = p^{-1} = u$$

dönüştürmesi yapılırsa

$$\frac{du}{dy} + \frac{u}{y} = \frac{1}{y}$$

lineer denklemine varılır. Bu denklemin genel çözümü

$$u = \frac{y + k}{y}$$

olup, $u = \frac{1}{p}$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\frac{1}{p} = \frac{y + k}{y} \quad ; \quad p = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{y + k}$$

$$dx = \frac{y + k}{y} dy$$

$$x + k_1 = y + k \log y$$

bulunur.

21.4 İkinci mertebeden lineer ve sabit katsayılı diferansiel denklemler.

$$\boxed{a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x) y = f(x)}$$

şeklindeki bir denklem n.mertebeden lineer denklem adını alır. a_i katsayıları sabitlerden ibaret iseler denkleme *sabit katsayılı lineer dife-*

ransiel denklem denir. Böyle bir denklem

$$A_0 \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n\, y = f(x)$$

şeklindedir. $f(x)$ e denklemin ikinci tarafı denir. Eğer $f(x) \equiv 0$ ise denkleme, ikinci tarafsız veya homojen diferansiel denklem denir. $f(x) \not\equiv 0$ ise denklem, ikinci taraflı veya homojen olmayan denklem adını alır.

Biz lineer ve sabit katsayılı denklemlerden evvelâ $n = 2$ halini yani ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiel denklemin çözümünü inceliyeceğiz. Böyle bir denklem genel olarak

$$A \frac{d^2 y}{dx^2} + B \frac{dy}{dx} + Cy = f(x)$$

şeklindedir. Bu denklemi çözmek için, evvelâ ikinci tarafsız yani homojen denklemin çözümünü elde etmek gerekir.

21.4 - 1. $A \dfrac{d^2 y}{dx^2} + B \dfrac{dy}{dx} + Cy = 0$ **denkleminin çözümü.**

Bu şekildeki, ikinci mertebeden, sabit katsayılı lineer ve homojen denklemin çözümünü elde etmek üzere evvelâ $A = 0$ halini gözönüne alalım. Bu takdirde denklem,

$$B \frac{dy}{dx} + Cy = 0$$

şeklinde, birinci mertebeden değişkenlere ayrılabilen tipte bir denklem halini alır. Buradan

$$\frac{dy}{y} = -\frac{C}{B}\, dx = r\, dx$$

olarak

$$\log \frac{y}{K} = rx \quad ; \quad y = K\,e^{rx}$$

elde edilir. Bu şekilde elde edilen sonuç bize, ikinci mertebeden diferansiel denklemin çözümünün de $y = K\,e^{rx}$ şeklinde olabileceğini telkin eder. Şimdi, $y = K\,e^{rx}$ ve türevlerini, ikinci mertebeden denklemde yerlerine koyarak $y = K\,e^{rx}$ in bu denklemi sağlama şartlarını bulalım. Bu takdirde

$$y = K\,e^{rx} \quad , \quad y' = K\,r\,e^{rx} \quad , \quad y'' = K\,r^2\,e^{rx}$$

olarak

$$A\,K\,r^2\,e^{rx} + B\,K\,r\,e^{rx} + C\,K\,e^{rx} \equiv 0$$

$$(Ar^2 + Br + C)\,K\,e^{rx} \equiv 0$$

elde edilir. K keyfi bir sabit olup daima sıfır olamaz. $e^{rx} \not\equiv 0$ olduğuna göre bu özdeşliğin sağlanabilmesi için

$$\boxed{Ar^2 + Br + C = 0}$$

olması gerekir. O halde $y = K\,e^{rx}$ deki r sayısı bu denklemi sağlıyan bir r, yani bu denklemin bir kökü ise $y = K\,e^{rx}$ homojen denklemin bir çözümüdür. $Ar^2 + Br + C = 0$ denklemine ikinci tarafsız denklemin *karakteristik denklemi* denir. Bu denklem, diferansiel denklemde

$$\frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{yerine} \quad r^2$$

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{yerine} \quad r$$

$$y \quad \text{yerine} \quad 1$$

yazılmak suretile, doğrudan doğruya elde edilebilir. Karakteristik denklem iki reel köke veya iki katlı bir köke veyahut da eşlenik iki kompleks köke malik olabileceğine göre, diferansiel denklemin çözümleri de değişik üç türde karşımıza çıkacaktır.

I. *Karakteristik denklemin iki reel kökünün olması hali.*

$(B^2 - 4AC > 0)$

Karakteristik denklemin reel kökleri r_1 ve r_2 ise

$$y_1 = K_1 e^{r_1 x} \quad , \quad y_2 = K_2 e^{r_2 x}$$

ifadeleri diferansiel denklemin birer çözümü olarak denklemi sağlarlar. Ancak birer tane keyfi sabit içerdiklerinden genel çözüm olamazlar. y_1 ve y_2 nin denklemi sağlama şartlarını yazarsak

$$Ay_1'' + By_1' + Cy_1 \equiv 0$$

$$Ay_2'' + By_2' + Cy_2 \equiv 0$$

ve bu iki bağıntıyı taraf tarafa toplarsak

$$A(y_1'' + y_2'') + B(y_1' + y_2') + C(y_1 + y_2) \equiv 0$$

elde edilir. Bu ise bize

$$\boxed{y = y_1 + y_2 = K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x}}$$

ifadesinin de, diferansiel denklemin bir çözümü olduğunu gösterir. Diğer taraftan bu çözüm, K_1 ve K_2 gibi iki keyfi sabit içerdiğinden genel çözümdür.

ÖRNEK. $y'' - y' - 6y = 0$ diferansiel denklemini çözünüz.

Karakteristik denklem

$$r^2 - r - 6 = 0$$

olup kökleri

$$r_1 = -3 \quad , \quad r_2 = 2$$

olarak denklemin genel çözümü

$$y = K_1 e^{-3x} + K_2 e^{2x}$$

dir.

II. *Karakteristik denklemin iki katlı bir kökü olması hali.*

$(B^2 - 4AC = 0)$

$Ar^2 + Br + C = 0$ denkleminin iki katlı kökü $r = -\dfrac{B}{2A}$ olup diferansiel denklemin çözümü $y = K\,e^{rx}$ dir. Ancak bu bağıntı bir tek keyfi sabit içerdiğinden genel çözüm olamaz. Genel çözümü bulmak için daha evvel birinci mertebeden lineer diferansiel denklemin çözümünde kullandığımız *"sabitin değişimi"* kuralını buraya uygulayalım. Bunun için de $y = K\,e^{rx}$ in diferansiel denklemin genel çözümü olabilmesi için K nın nasıl bir $K(x)$ fonksiyonu olması gerektiğini araştıralım.

$$y = K(x)\,e^{rx} \quad \text{den}$$

$$y' = K'\,e^{rx} + Kr\,e^{rx} = e^{rx}(K' + Kr)$$

$$y'' = (K'' + K'r)\,e^{rx} + (K' + Kr)\,r\,e^{rx} = (K'' + 2K'r + Kr^2)\,e^{rx}$$

olup y ve türevlerini diferansiel denklemde yerlerine koyarak sağlama şartını elde etmek istersek

$$A\,e^{rx}(K'' + 2K'r + Kr^2) + B\,e^{rx}(K' + Kr) + C\,K\,e^{rx} = 0$$

veya

$$A\,K'' + (2Ar + B)\,K' + (Ar^2 + Br + C)\,K = 0$$

elde edilir. Halbuki, r karakteristik denklemin iki katlı kökü olup

$$Ar^2 + Br + C = 0 \quad , \quad 2Ar + B = 0$$

dır. O halde sağlama şartı

$$A\,K'' = 0 \quad \text{veya} \quad K'' = 0$$

olarak, buradan

$$K' = m \quad , \quad K = mx + n$$

bulunur. Buna göre

$$y = K(x)\, e^{rx} = (mx + n)\, e^{rx}$$

diferansiel denklemin çözümü ve m , n gibi iki keyfi sabit içerdiğinden de genel çözümüdür.

ÖRNEK. $y'' + 6y' + 9y = 0$ diferansiel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Karakteristik denklem $r^2 + 6r + 9 = 0$ olup kökleri $r_1 = r_2 = -3$ (iki katlı) dır. O halde denklemin genel çözümü

$$y = (mx + n)\, e^{-3x}$$

dir.

III. *Karakteristik denklemin iki kompleks kökü olması hali.*

$(B^2 - 4AC < 0)$

Bu takdirde karakteristik denklemin kökleri eşlenik kompleks bir kök çifti olup

$$r_1 = -\frac{B}{2A} + \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC} = \alpha + \beta i$$

$$r_2 = -\frac{B}{2A} - \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC} = \alpha - \beta i$$

dir. Buna göre diferansiel denklemin genel çözümü

$$y = K_1\, e^{r_1 x} + K_2\, e^{r_2 x} = K_1\, e^{(\alpha+\beta i)\, x} + K_2\, e^{(\alpha-\beta i)\, x}$$

$$y = e^{\alpha x}(K_1\, e^{i\beta x} + K_2\, e^{-i\beta x})$$

dir. Genel çözüm bu şekilde kullanılmaz. Bu ifadeyi kullanılır bir şekle sokmak için

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x$$

$$e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \sin \beta x$$

olduğunu hatırlıyalım. (Bak. 18.1-10) Bu bağıntıları genel çözümde yerlerine koyarsak

$$y = e^{\alpha x}\,[K_1 \cos \beta x + K_1 i \sin \beta x + K_2 \cos \beta x - K_2 i \sin \beta x]$$

$$y = e^{\alpha x}\,[(K_1 + K_2) \cos \beta x + (K_1 - K_2)\, i \sin \beta x]$$

elde edilir. Buradaki i imajiner birimini kaldırmak üzere, K_1 ve K_2 keyfi sabitleri, eşlenik iki kompleks sayı olarak seçilirse

$$K_1 = a + b\,i \quad , \quad K_2 = a - b\,i$$

olur ve buradan

$$K_1 + K_2 = 2a \quad , \quad K_1 - K_2 = 2b\,i$$

ve

$$y = e^{\alpha x}\,(2a \cos \beta x + 2b\, i\,.\,i \sin \beta x)$$

$$y = e^{\alpha x}\,(2a \cos \beta x - 2b \sin \beta x)$$

$$\boxed{y = e^{\alpha x}\,(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)}$$

veya

$$\boxed{y = M\, e^{\alpha x} \sin (\beta x - \varphi)}$$

elde edilir.

ÖRNEK. $y'' - 2y' + 10y = 0$ diferansiel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Karakteristik denklem $r^2 - 2r + 10 = 0$ olup kökleri

$$r = 1 \pm 3i$$

olarak diferansiel denklemin genel çözümü

$$y = e^x\,(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$$

dir.

ÖZET. $Ay'' + By' + Cy = 0$ *şeklindeki ikinci mertebeden homojen bir diferansiel denklemin genel çözümünü bulmak için evvelâ* $Ar^2 + Br + C = 0$ *şeklindeki karakteristik denklem yazılır.*

I. Karakteristik denklemin r_1 *ve* r_2 *gibi iki reel kökü varsa diferansiel denklemin genel çözümü*

$$\boxed{y = K_1\, e^{r_1 x} + K_2\, e^{r_2 x}}$$

II. Karakteristik denklemin $r_1 = r_2 = r$ *gibi iki katlı bir kökü varsa diferansiel denklemin genel çözümü*

$$\boxed{y = (K_1 x + K_2)\, e^{rx}}$$

III. Karakteristik denklemin $\alpha \pm \beta i$ *gibi eşlenik kompleks kök çifti varsa diferansiel denklemin genel çözümü*

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(K_1 \cos\beta x + K_2 \sin\beta x)}$$

dir.

21.4 - 2. $\boxed{A \dfrac{d^2y}{dx^2} + B \dfrac{dy}{dx} + Cy = f(x)}$ denkleminin çözümü. (İkinci taraflı denklemin çözümü)

Bu denklemin çözümü için iki kuraldan faydalanacağız.

1. Kural. Denklemin çözümü için aşağıdaki teoremden faydalanılır.

TEOREM. Lineer, sabit katsayılı ve ikinci taraflı bir diferansiel denklemin genel çözümü, y_1 *ikinci tarafsız denklemin genel çözümü ve* y_2 *ikinci taraflı denklemin bir özel çözümü olmak üzere*

$$\boxed{y = y_1 + y_2}$$

dir.

İspat : y_2, ikinci taraflı denklemin bir özel çözümü olduğuna göre

$$Ay_2'' + By_2' + Cy_2 \equiv f(x) \qquad (1)$$

dir. Şimdi $y = y_1 + y_2$ nin ikinci taraflı denklemin genel çözümü olabilmesi için y_1 in ne olması gerektiğini araştıralım. $y = y_1 + y_2$ çözüm ise, diferansiel denklemi sağlamalı, yani

$$A(y_1'' + y_2'') + B(y_1' + y_2') + C(y_1 + y_2) \equiv f(x)$$

$$(Ay_2'' + By_2' + Cy_2) + (Ay_1'' + By_1' + Cy_1) \equiv f(x)$$

olmalıdır. Birinci parantezin $f(x)$ e özdeş olduğu (1) den görülmekle

$$f(x) + (Ay_1'' + By_1' + Cy_1) \equiv f(x)$$

$$Ay_1'' + By_1' + Cy_1 \equiv 0$$

elde edilir. Bu ise, y_1 in ikinci tarafsız yani homojen denklemin çözümü olduğunu gösterir. Biz, $y_1 + y_2$ nin ikinci taraflı denklemin genel çözümü olmasını istediğimize göre, içinde iki tane keyfi sabit bulunması gerekir. Bu ise, y_1 in ikinci tarafsız denklemin genel çözümü olarak seçilmesi ile sağlanmış olur.

Buna göre, ikinci taraflı denklemin genel çözümünü bulmak için, evvelâ ikinci tarafsız denklemin genel çözümünü bulmak gerekir. Bu konuyu daha evvel incelediğimize göre şimdi de ikinci taraflı denklemin bir özel çözümünün nasıl bulunabileceğini araştıralım.

ÖZEL ÇÖZÜMLERİN BULUNMASI :

$Ay'' + By' + Cy = f(x)$ diferansiel denkleminin özel çözümlerinin bulunması için genel bir kuralı, denklemin 2. yol dan çözülmesi sırasında ele alacağız. Ancak, $f(x)$ in bazı belirli şekilleri için, doğrudan doğruya bir özel çözüm bulmak mümkündür. Şimdi bu şekillerin en önemlilerini gözden geçireceğiz.

I. $f(x)$ in k yıncı dereceden x in bir tam çok terimlisi olması hali.

Bu takdirde, y_2 özel çözümü genellikle, x in aynı dereceden bir tam çok terimlisidir. Örneğin

$$Ay'' + By' + Cy = ax^2 + bx + c$$

diferansiel denkleminin y_2 özel çözümünü arayalım. Buna göre, özel çözüm

$$y_2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

şeklindedir. Şimdi bu bağıntıdaki α, β, γ katsayılarını belirtmek üzere, y_2 nin diferansiel denklemi sağlama şartını yazalım.

$$y_2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad y_2' = 2\alpha x + \beta \qquad y_2'' = 2\alpha$$

olarak

$$A.2\alpha + (2\alpha x + \beta)\,B + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,C \equiv ax^2 + bx + c$$
$$C\alpha x^2 + (2B\alpha + C\beta)\,x + (2A\alpha + B\beta + C\gamma) \equiv ax^2 + bx + c$$

dır. Bu özdeşliğe belirsiz katsayılar kuralı uygulanırsa

$$C\alpha = a$$
$$2B\alpha + C\beta = b$$
$$2A\alpha + B\beta + C\gamma = c$$

bulunur. Bunlardan elde edilecek α, β, γ katsayıları y_2 de yerlerine konursa özel çözüm elde edilmiş olur. Birinci denklemden,

$$\alpha = \frac{a}{C}$$

olup β ve γ nın da paydalarında C nin bulunacağı kolayca görülebilir. Buna göre α, β, γ nın mevcut olabilmesi için $C \neq 0$ olmalıdır.

$C = 0$ ise diferansiel denklemin birinci tarafı y li terimi içermez. Bu halde, aynı dereceden bir çok terimli, denklemi sağlamaz ve dolayısile özel çözüm olamaz.

$C = 0$ ise, $f(x)$ e karşılık olan y_2 özel çözümü, x in aynı de-

receden çok terimlisi ile x ın çarpımına eşittir. Örneğin diferansiel denklem

$$Ay'' + By' = ax^2 + bx + c$$

şeklinde ise özel çözüm

$$y_2 = x(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$$

şeklindedir.

ÖZET. $Ay'' + By' + Cy = f(x)$ denklemindeki $f(x)$ in, x in bir tam çok terimlisi şeklinde olması halinde, y_2 özel çözümü :

$C \neq 0$ ise $f(x)$ le aynı dereceden bir tam çok terimli;

$C = 0$ ise $f(x)$ le aynı dereceden bir tam çok terimlinin x le çarpımı;

şeklindedir.

ÖRNEK 1. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 5x + 3$ diferansiel denklemini çözünüz.

1. İkinci tarafsız denklemin genel çözümü :

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

olup bu denklemin karakteristik denklemi

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

ve kökleri $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ olarak

$$y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

dir.

2. İkinci taraflıya ait özel çözüm :

$$y_2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

şeklinde olup α, β, γ yı belirtmek üzere y_2 nin denklemi sağlama şartını yazarsak

$$y_2' = 2\alpha x + \beta \quad , \quad y_2'' = 2\alpha$$

$$2\alpha - 6\alpha x - 3\beta + 2\alpha x^2 + 2\beta x + 2\gamma \equiv 2x^2 - 5x + 3$$

$$2\alpha x^2 + (-6\alpha + 2\beta)\, x + (2\alpha - 3\beta + 2\gamma) \equiv 2x^2 - 5x + 3$$

$$2\alpha = 2 \quad ; \quad \alpha = 1$$

$$-6\alpha + 2\beta = -5 \quad ; \quad \beta = \frac{1}{2}$$

$$2\alpha - 3\beta + 2\gamma = 3 \quad ; \quad \gamma = \frac{5}{4}$$

bulunur. Buna göre özel çözüm

$$y_2 = x^2 + \frac{1}{2}\, x + \frac{5}{4}$$

dir.

3. İkinci taraflı denklemin genel çözümü :

$$y = y_1 + y_2$$

olup

$$y = c_1\, e^x + c_2\, e^{2x} + x^2 + \frac{1}{2}\, x + \frac{5}{4}$$

dir.

ÖRNEK 2. $y'' - 4y' = x^2 - 2x - 1$ diferansiel denklemini çözünüz.

1. İkinci tarafsız denklemin genel çözümü :

Karakteristik denklem

$$r^2 - 4r = 0$$

ve kökleri $r_1 = 4$, $r_2 = 0$ olup

$$y_1 = c_1\, e^{4x} + c_2$$

dir.

2. İkinci taraflı denklemin özel çözümü :

$C = 0$ olup özel çözüm

$$y_2 = x(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$$

şeklindedir. α, β, γ yı belirtmek üzere y_2 nin denklemi sağlama şartını yazarsak

$$y_2' = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma \quad ; \quad y_2'' = 6\alpha x + 2\beta$$

olup

$$6\alpha x + 2\beta - 12\alpha x^2 - 8\beta x - 4\gamma \equiv x^2 - 2x - 1$$

$$-12\alpha x^2 + (6\alpha - 8\beta)x + (2\beta - 4\gamma) \equiv x^2 - 2x - 1$$

$$-12\alpha = 1 \quad ; \quad \alpha = -\frac{1}{12}$$

$$6\alpha - 8\beta = -2 \quad ; \quad \beta = \frac{3}{16}$$

$$2\beta - 4\gamma = -1 \quad ; \quad \gamma = \frac{11}{32}$$

bulunur. Buna göre özel çözüm :

$$y_2 = \frac{11}{32}x + \frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{12}x^3$$

dir.

3. İkinci taraflı denklemin genel çözümü.

$$y = y_1 + y_2$$

olup

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 + \frac{11}{32}x + \frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{12}x^3$$

dir.

II. *$f(x)$ in $D e^{\alpha x}$ şeklinde üstel bir fonksiyon olması hali.*

$$Ay'' + By' + Cy = D e^{\alpha x}$$

denkleminin özel çözümü, ikinci tarafın ayni şekilde bir fonksiyon, yani

$$\boxed{y_2 = K\, e^{\alpha x}}$$

şeklindedir.

Buradaki K belirtilmesi gereken bir sabittir. Bu sabiti belirtmek üzere y_2 nin diferansiel denklemi sağlama şartını yazarsak

$$y_2' = K\alpha\, e^{\alpha x} \quad , \quad y_2'' = K\alpha^2\, e^{\alpha x}$$

olup

$$A K \alpha^2 e^{\alpha x} + B K \alpha\, e^{\alpha x} + C K\, e^{\alpha x} \equiv D\, e^{\alpha x}$$

$$K\,(A\alpha^2 + B\alpha + C)\, e^{\alpha x} \equiv D\, e^{\alpha x}$$

$$K\,(A\alpha^2 + B\alpha + C) = D$$

$$K = \frac{D}{A\alpha^2 + B\alpha + C}$$

elde edilir. Görülüyorki K nın belirli olabilmesi için $A\alpha^2 + B\alpha + C \neq 0$ olmalıdır. Bu ise α nın, ikinci tarafsız denklemin $Ar^2 + Br + C = 0$ karakteristik denkleminin, bir kökü olmaması gerektiğini gösterir.

ÖRNEK 3. $y'' + 4y' + 8y = e^{-2x}$ diferansiel denklemini çözünüz.

1. İkinci tarafsız denklemin genel çözümü :

Karakteristik denklem

$$r^2 + 4r + 8 = 0$$

ve kökleri $r = -2 \pm 2i$ olup

$$y_1 = e^{-2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

dir.

2. İkinci taraflı denklemin özel çözümü :

$f(x) = e^{-2x}$ olup özel çözüm

$$y_2 = K \cdot e^{-2x}$$

şeklindedir. K yı belirtmek üzere y_2 nin denklemi sağlama şartını yazarsak

$$y_2' = -2K\,e^{-2x} \quad , \quad y_2'' = 4K\,e^{-2x}$$

olup

$$4K\,e^{-2x} - 8K\,e^{-2x} + 8K\,e^{-2x} \equiv e^{-2x}$$

$$4K\,e^{-2x} \equiv e^{-2x} \quad ; \quad 4K = 1 \quad ; \quad K = \frac{1}{4}$$

bulunur. Buna göre özel çözüm

$$y_2 = \frac{1}{4}\,e^{-2x}$$

dir.

3. İkinci taraflı denklemin genel çözümü,

$$y = y_1 + y_2$$

olup

$$y = e^{-2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{1}{4}\,e^{-2x}$$

dir.

Özel haller. Şimdi de $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ yani α nın karakteristik denklemin kökü olması hallerini inceliyelim. α kök ise K yı veren bağıntının paydası sıfır yani

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$$

olacağından, K hesaplanamaz. Bu takdirde, özel çözümü bulmak üzere

$$y_2 = K\,e^{\alpha x}$$

bağıntısına sabitin değişimi kuralını uygulayalım. Yani şu soruyu ortaya koyalım. K nasıl bir $K(x)$ fonksiyonu olmalıdır ki $y_2 = K\,e^{\alpha x}$ bağıntısı, α nın karakteristik denklemin kökü olması halinde, dife-

ransiel denklemin çözümü olsun. Bu halde $y_2 = K(x)\,e^{\alpha x}$ in, denklemi sağlama şartını yazalım.

$$y_2' = K'\,e^{\alpha x} + K\,\alpha\,e^{\alpha x}$$

$$y_2'' = K''\,e^{\alpha x} + 2K'\,\alpha\,e^{\alpha x} + K\,\alpha^2\,e^{\alpha x}$$

olup

$$A\,(K''\,e^{\alpha x} + 2K'\,\alpha\,e^{\alpha x} + K\,\alpha^2\,e^{\alpha x}) + B\,(K'\,e^{\alpha x} + K\,\alpha\,e^{\alpha x}) + C\,K\,e^{\alpha x} = D\,e^{\alpha x}$$

$$A\,K'' + (2A\alpha + B)\,K' + (A\alpha^2 + B\alpha + C)\,K = D$$

bulunur.

Burada iki hal vardır.

1. α karakteristik denklemin bir basit kökü ise

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$$

olarak

$$A\,K'' + (2A\alpha + B)\,K' = D$$

denklemine varılır. Bu ise K yı bilinmiyen kabul eden ikinci mertebeden lineer ve ikinci taraflı bir diferansiel denklemdir. Bu denklemin bir özel çözümü, K yı belirtmeye imkân verir. İkinci taraf sıfırıncı dereceden bir çok terimli olduğundan ve denklemde K lı terim bulunmadığından özel çözüm

$$K = mx$$

şeklindedir. Buna göre verilen diferansiel denklemin özel çözümü

$$\boxed{y_2 = mx\,e^{\alpha x}}$$

şeklinde olur. m belirtilmesi gereken bir sabittir.

2. α karakteristik denklemin iki katlı bir kökü ise,

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$$

olmaktan başka $2A\alpha + B = 0$ olarak K yı bilinmiyen kabul eden diferansiel denklem

$$A K'' = D \quad ; \quad K'' = m_1$$

şekline girer. Buna göre de

$$K' = m_1 x \quad ; \quad K = \frac{m_1}{2} x^2 = m x^2$$

bulunur. $m_1 x$ ve mx^2 ifadelerine bir sabit ilave etmenin bir faydası yoktur. Çünkü bunlar y_1 le toplanacağından, y_1 içindeki terimlerle birleşecektir. Bu halde de, özel çözüm

$$\boxed{y_2 = m x^2 e^{\alpha x}}$$

şeklinde olur. m belirtilmesi gereken bir sabittir.

ÖRNEK 4. $y'' - 5y' + 6y = 5e^{2x}$ diferansiel denklemini çözünüz.

1. İkinci tarafsız denklemin genel çözümü :

Karakteristik denklem

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

ve kökleri $r_1 = 2$, $r_2 = 3$ olup

$$y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

dir.

2. İkinci taraflı denklemin özel çözümü :

$\alpha = 2$ karakteristik denklemin bir basit kökü olup özel çözüm

$$y_2 = K x e^{2x}$$

şeklindedir. K yı belirtmek üzere y_2 nin, diferansiel denklemi sağlama şartını yazarsak

$$y_2' = K e^{2x} + 2K x e^{2x}$$

$$y_2'' = 4K\,e^{2x} + 4K\,x\,e^{2x}$$

olup

$$4K\,e^{2x} + 4K\,x\,e^{2x} - 5K\,e^{2x} - 10K\,x\,e^{2x} + 6K\,x\,e^{2x} \equiv 5e^{2x}$$

$$-K\,e^{2x} \equiv 5\,e^{2x}$$

$$K = -5$$

bulunur. Buna göre özel çözüm

$$y_2 = -5x\,e^{2x}$$

dir.

3. İkinci taraflı denklemin genel çözümü :

$$y = y_1 + y_2$$

olup

$$y = c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{3x} - 5x\,e^{2x}$$

dir.

ÖRNEK 5. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$ diferansiel denklemini çözünüz.

1. İkinci tarafsız denklemin genel çözümü :

Karakteristik denklem

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

ve kökleri iki katlı olarak $r = -2$ olup

$$y = (c_1 + c_2x)\,e^{-2x}$$

dir.

2. İkinci taraflı denklemin özel çözümü :

$\alpha = -2$, karakteristik denklemin iki katlı kökü olup özel çözüm

$$y_2 = K\,x^2\,e^{-2x}$$

şeklindedir. K yı belirtmek üzere y_2 nin diferansiel denklemi sağlama şartını yazarsak

$$y_2' = 2K\,x\,\mathrm{e}^{-2x} - 2K\,x^2\,\mathrm{e}^{-2x}$$

$$y_2'' = 2K\,\mathrm{e}^{-2x} - 8K\,x\,\mathrm{e}^{-2x} + 4K\,x^2\,\mathrm{e}^{-2x}$$

olup

$$2K\,\mathrm{e}^{-2x} - 8K\,x\,\mathrm{e}^{-2x} + 4K\,x^2\,\mathrm{e}^{-2x} + 8K\,x\,\mathrm{e}^{-2x} - 8K\,x^2\,\mathrm{e}^{-2x} + 4K\,x^2\,\mathrm{e}^{-2x} \equiv \mathrm{e}^{-2x}$$

$$2K\,\mathrm{e}^{-2x} \equiv \mathrm{e}^{-2x} \quad ; \quad K = \frac{1}{2}$$

bulunur. Buna göre özel çözüm

$$y_2 = \frac{1}{2}\,x^2\,\mathrm{e}^{-2x}$$

dir.

3. İkinci taraflı denklemin genel çözümü :

$$y = y_1 + y_2$$

olup

$$y = (c_1 + c_2 x)\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}\,x^2\,\mathrm{e}^{-2x}$$

$$y = (c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}\,x^2)\,\mathrm{e}^{-2x}$$

dir.

ÖZET. $Ay'' + By' + Cy = D\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ *şeklindeki bir denklemin özel çözümü :*

1. α *karakteristik denklemin bir kökü değilse*

$$\boxed{y_2 = K\,\mathrm{e}^{\alpha x}}$$

2. α *karakteristik denklemin basit bir kökü ise,*

$$\boxed{y_2 = K\,x\,e^{\alpha x}}$$

3. α *karakteristik denklemin iki katlı bir kökü ise,*

$$\boxed{y_2 = K\,x^2\,e^{\alpha x}}$$

şeklindedir

K belirtilmesi gereken bir sabittir.

III. $f(x)$ *in* $M \sin px + N \cos px$ *şeklinde olması hali.*

Bu takdirde y_2 özel çözümü, genel olarak aynı şekilde bir bağıntı yani

$$\boxed{y_2 = \alpha \sin px + \beta \cos px}$$

şeklindedir. M ve N den bir tanesi sıfır olsa bile, y_2 özel çözümü gösterilen şekildedir. α ve β belirtilmesi gereken sabitler olup y_2 nin denklemi sağlama şartından bulunabilir. Gerçekten

$$y_2' = \alpha p \cos px - \beta p \sin px$$
$$y_2'' = -\alpha p^2 \sin px - \beta p^2 \cos px$$

olup denklemde yerlerine konursa

$$A(-\alpha p^2 \sin px - \beta p^2 \cos px) + B(\alpha p \cos px - \beta p \sin px)$$
$$+ C(\alpha \sin px + \beta \cos px) \equiv M \sin px + N \cos px$$

$$(-\alpha p^2 A - \beta p B + C\alpha) \sin px + (-\beta p^2 A + \alpha p B + \beta C) \cos px$$
$$\equiv M \sin px + N \cos px$$

elde edilir. Buradan da

$$(C - Ap^2)\,\alpha - pB\beta = M$$
$$pB\alpha + (C - Ap^2)\,\beta = N$$

yazılabilir ki bu denklemler de α ve β yı verirler. Bu denklem sisteminin katsayılar determinantı olan

$$(C - Ap^2)^2 + p^2B^2$$

bağıntısı sıfırdan farklı olursa α ve β yı bulmak daima mümkün olur.

$(C - Ap^2)^2 + p^2B^2$ bağıntısı ancak,

$$C = Ap^2 \qquad \text{ve} \qquad B = 0$$

olması halinde sıfıra eşit olabilir. Bu halde α ve β mevcut olamaz ve özel çözüm de $y_2 = \alpha \sin px + \beta \cos px$ şeklinde olamaz. Bu takdirde özel çözüm

$$\boxed{y_2 = x(\alpha \sin px + \beta \cos px)}$$

şeklindedir. $C = Ap^2$, $B = 0$ olması özel halinde y' lü terimin bulunmayacağı kolayca görülür.

ÖZET. $Ay'' + By' + Cy = M \sin px + N \cos px$ *diferansiel denkleminin özel çözümü, genellikle*

$$\boxed{y_2 = \alpha \sin px + \beta \cos px}$$

şeklindedir. Ancak, $B = 0$ ve $C = Ap^2$ *olması halinde özel çözüm*

$$\boxed{y_2 = x(\alpha \sin px + \beta \cos px)}$$

şeklindedir.

ÖRNEK 6. $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$ diferansiel denklemini çözünüz.

1. İkinci tarafsız denklemin genel çözümü :

Karakteristik denklem

$$r^2 + r - 2 = 0$$

ve kökleri $r_1 = -2$, $r_2 = 1$ olup

$$y_1 = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$$

dir.

2. İkinci taraflı denklemin özel çözümü :

$$y_2 = \alpha \sin 2x + \beta \cos 2x$$

şeklinde olup α ve β yı belirtmek üzere y_2 nin denklemi sağlama şartını yazarsak,

$$y_2' = 2\alpha \cos 2x - 2\beta \sin 2x$$
$$y_2'' = -4\alpha \sin 2x - 4\beta \cos 2x$$

olarak

$$(-6\alpha - 2\beta) \sin 2x + (2\alpha - 6\beta) \cos 2x \equiv 8 \sin 2x$$

$$-6\alpha - 2\beta = 8 \quad ; \quad \alpha = -\frac{6}{5}$$

$$2\alpha - 6\beta = 0 \quad ; \quad \beta = -\frac{2}{5}$$

bulunur. Bunlara göre özel çözüm

$$y_2 = -\frac{6}{5} \sin 2x - \frac{2}{5} \cos 2x$$

dir.

3. İkinci taraflı denklemin genel çözümü :

$$y = y_1 + y_2$$

olup

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x - \frac{6}{5} \sin 2x - \frac{2}{5} \cos 2x$$

dir.

ÖRNEK 7. $y'' + 9y = 2 \sin 3x$ diferansiel denklemini çözünüz.

1. İkinci tarafsız denklemin genel çözümü :

Karakteristik denklem

$$r^2 + 9 = 0$$

ve kökleri $r = \pm 3\,i$ olup

$$y_1 = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x$$

dir.

2. İkinci taraflı denklemin özel çözümü :

$B = 0$ ve $Ap^2 = 9 = C$ olup özel çözüm

$$y_2 = x\,(\alpha \sin 3x + \beta \cos 3x)$$

şeklindedir. α ve β yı belirtmek üzere y_2 nin denklemi sağlama şartını yazarsak

$$y_2' = \alpha \sin 3x + \beta \cos 3x + x\,(3\alpha \cos 3x - 3\beta \sin 3x)$$

$$y_2'' = 6\alpha \cos 3x - 6\beta \sin 3x + x\,(-9\alpha \sin 3x - 9\beta \cos 3x)$$

olarak

$$6\alpha \cos 3x - 6\beta \sin 3x + x\,(-9\alpha \sin 3x - 9\beta \cos 3x) + x\,(9\alpha \sin 3x + 9\beta \cos 3x) = 2 \sin 3x$$

$$6\alpha \cos 3x - 6\beta \sin 3x = 2 \sin 3x$$

ve

$$6\alpha = 0 \quad , \quad -6\beta = 2$$

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = -\frac{1}{3}$$

bulunur. Bunlara göre özel çözüm

$$y_2 = -\frac{1}{3}\,x \cos 3x$$

dir.

3. İkinci taraflı denklemin genel çözümü :

$$y = y_1 + y_2$$

olup

$$y = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x - \frac{x}{3} \cos 3x$$

dir.

IV. $f(x) = e^{\alpha x} \varphi(x)$ *olması hali.*

$$Ay'' + By' + Cy = e^{\alpha x} \varphi(x)$$

denkleminin y_2 özel çözümünü elde etmek için evvelâ

$$y_2 = Z e^{\alpha x}$$

olacak şekilde bir Z fonksiyonu aranır. Bunun için de diferansiel denklemde $y_2 = Ze^{\alpha x}$ dönüştürmesi yapılır. Bu halde

$$y_2' = Z' e^{\alpha x} + \alpha Z e^{\alpha x}$$

$$y_2'' = Z'' e^{\alpha x} + 2Z' \alpha e^{\alpha x} + Z \alpha^2 e^{\alpha x}$$

olarak

$$A(Z'' e^{\alpha x} + 2Z' \alpha e^{\alpha x} + Z \alpha^2 e^{\alpha x}) + B(Z' e^{\alpha x} + Z \alpha e^{\alpha x}) + C Z e^{\alpha x} = e^{\alpha x} \varphi(x)$$

$$A Z'' + (2A\alpha + B) Z' + (A\alpha^2 + B\alpha + C) Z = \varphi(x)$$

denklemine varılır. Bu denklemin $\varphi(x)$ e karşılık olan özel çözümü bulunur ve $y_2 = Z e^{\alpha x}$ bağıntısında yerine konursa verilen denklemin özel çözümü elde edilmiş olur.

Eğer, Z i bilinmiyen kabul eden diferansiel denklemin genel çözümü bulunur ve $y = Z e^{\alpha x}$ bağıntısında yerine konursa, verilen diferansiel denklemin genel çözümü elde edilmiş olur.

ÖRNEK 8. $y'' + 4y' + 4y = x^2 e^{3x}$ diferansiel denklemini çözünüz.

1. İkinci tarafsız denklemin genel çözümü :

Karakteristik denklem

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

ve kökü iki katlı olarak $r = -2$ olup

$$y_1 = (c_1 x + c_2)e^{-2x}$$

dir.

2. İkinci taraflı denklemin özel çözümü :

$y = Z e^{3x}$ dönüştürmesi yapılırsa

$$y' = Z' e^{3x} + 3Z e^{3x} \quad ; \quad y'' = Z'' e^{3x} + 6Z' e^{3x} + 9Z e^{3x}$$

olarak

$$Z'' e^{3x} + 6Z' e^{3x} + 9Z e^{3x} + 4Z' e^{3x} + 12Z e^{3x} + 4Z e^{3x} = x^2 e^{3x}$$
$$Z'' + 10Z' + 25Z = x^2$$

elde edilir. Bu denklemi sağlıyan bir Z olarak, özel çözüm seçilirse

$$Z = ax^2 + bx + c$$

şeklinde olur. a, b, c yi belirtmek üzere sağlama şartını yazarsak

$$Z' = 2ax + b \quad ; \quad Z'' = 2a$$

olup

$$2a + 20ax + 10b + 25ax^2 + 25bx + 25c \equiv x^2$$
$$25ax^2 + (20a + 25b)x + 2a + 10b + 25c \equiv x^2$$
$$25a = 1 \quad , \quad 20a + 25b = 0 \quad , \quad 2a + 10b + 25c = 0$$
$$a = \frac{1}{25} \quad , \quad b = -\frac{4}{125} \quad , \quad c = \frac{6}{625}$$

bulunur. Buna göre

$$Z = \frac{1}{625}(25x^2 - 20x + 6)$$

ve

$$y_2 = Z\,e^{3x} = \frac{e^{3x}}{625}(25x^2 - 20x + 6)$$

dır.

3. İkinci taraflı denklemin genel çözümü :

$$y = y_1 + y_2$$

olup

$$y = (c_1x + c_2)\,e^{-2x} + \frac{e^{3x}}{625}(25x^2 - 20x + 6)$$

dır.

ÖRNEK 9. $y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$ diferansiel denklemini çözünüz.

Denklemin genel çözümünü elde etmek üzere $y = Z\,e^{2x}$ dönüştürmesini yapalım. Bu takdirde

$$y' = Z'\,e^{2x} + 2Z\,e^{2x} \quad ; \quad z'' = Z''\,e^{2x} + 4Z'\,e^{2x} + 4Z\,e^{2x}$$

olarak

$$Z''\,e^{2x} + 4Z'\,e^{2x} + 4Z\,e^{2x} - 4Z\,e^{2x} = e^{2x} \sin 2x$$

$$Z'' + 4Z' = \sin 2x$$

denklemine varılır.

Bu denklemin ikinci tarafsızlısının genel çözümü,

$$r^2 + 4r = 0 \quad , \quad r_1 = -4 \quad , \quad r_2 = 0$$

olarak

$$Z_1 = c_1\,e^{-4x} + c_2$$

dir. İkinci taraflısının özel çözümü ise

$$Z_2 = \alpha \sin 2x + \beta \cos 2x$$

şeklinde olup α, β yı belirtmek üzere sağlama şartı yazılırsa

$$Z_2' = 2\alpha \cos 2x - 2\beta \sin 2x$$

$$Z_2'' = -4\alpha \sin 2x - 4\beta \cos 2x$$

$$-4\alpha \sin 2x - 4\beta \cos 2x + 8\alpha \cos 2x - 8\beta \sin 2x = \sin 2x$$

$$(-4\alpha - 8\beta) \sin 2x + (8\alpha - 4\beta) \cos 2x = \sin 2x$$

$$-4\alpha - 8\beta = 1 \quad ; \quad 8\alpha - 4\beta = 0$$

$$\alpha = -\frac{1}{20} \quad , \quad \beta = -\frac{1}{10}$$

bulunur. Buna göre özel çözüm

$$Z_2 = -\frac{1}{20} (\sin 2x + 2 \cos 2x)$$

dir. Genel çözüm ise

$$Z = Z_1 + Z_2 = c_1 \, e^{-4x} + c_2 - \frac{1}{20} (\sin 2x + 2 \cos 2x)$$

dir. Z in bu değeri $y = Z \, e^{2x}$ bağıntısında yerine konursa, verilen diferansiel denklemin genel çözümü olarak

$$y = c_1 \, e^{-2x} + c_2 \, e^{2x} - \frac{e^{2x}}{20} (\sin 2x + 2 \cos 2x)$$

bulunur.

V. *$f(x)$ in, birkaç fonksiyonun toplamı şeklinde olması hali.*

Bu takdirde özel çözüm, $f(x)$ i oluşturan fonksiyonların herbirine karşılık gelen özel çözümlerin toplamına eşittir. Örneğin

$$Ay'' + By' + Cy = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$

şeklindeki bir diferansiel denklemin özel çözümü $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ fonksiyonlarının herbirine karşılık gelen y_{21} , y_{22} , y_{23} özel çözümlerinin toplamına, yani

$$y_2 = y_{21} + y_{22} + y_{23}$$

e eşittir.

ÖRNEK 10. $y'' + y' - 2y = x + \sin x$ diferansiel denklemini çözünüz.

1. İkinci tarafsız denklemin genel çözümü :

Karakteristik denklem

$$r^2 + r - 2 = 0$$

ve kökleri $r_1 = -2$, $r_2 = 1$ olup

$$y_1 = c_1 \mathrm{e}^{-2x} + c_2 \mathrm{e}^x$$

dir.

2. İkinci taraflı denklemin özel çözümü :

İkinci taraf $x + \sin x$ şeklinde olup özel çözüm x ve $\sin x$ e karşılık gelen özel çözümlerin toplamına eşit, yani

$$y_2 = y_{21} + y_{22}$$

dir.

$y_{21} = ax + b$ şeklinde olup a ve b yi belirtmek üzere sağlama şartı yazılırsa :

$$y_{21}' = a \qquad ; \qquad y_{21}'' = 0$$

$$a - 2ax - 2b \equiv x$$

$$-2a = 1 \qquad ; \qquad a - 2b = 0$$

$$a = -\frac{1}{2} \qquad ; \qquad b = -\frac{1}{4}$$

bulunur. Buna göre

$$y_{21} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

dür.

y_{22} ise $y_{22} = \alpha \sin x + \beta \cos x$ şeklinde olup α ve β yı belirtmek üzere sağlama şartı yazılırsa

$$y_{22}' = \alpha \cos x - \beta \sin x \quad ; \quad y_{22}'' = -\alpha \sin x - \beta \cos x$$

$$-\alpha \sin x - \beta \cos x + \alpha \cos x - \beta \sin x - 2\alpha \sin x - 2\beta \cos x = \sin x$$

$$(-3\alpha - \beta) \sin x + (\alpha - 3\beta) \cos x = \sin x$$

$$-3\alpha - \beta = 1 \qquad \alpha - 3\beta = 0$$

$$\alpha = -\frac{3}{10} \quad , \quad \beta = -\frac{1}{10}$$

bulunur. Bunlara göre

$$y_{22} = -\frac{1}{10}(3 \sin x + \cos x)$$

dir. O halde verilen denklemin özel çözümü

$$y_2 = y_{21} + y_{22} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} - \frac{1}{10}(3 \sin x + \cos x)$$

dir. Denklemin genel çözümü ise

$$y = y_1 + y_2$$

den

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} - \frac{1}{10}(3 \sin x + \cos x)$$

olarak bulunur.

2. Kural. Sabitin değişimi kuralı (Lagrange kuralı).

Lagrange ispat etmiştir ki, ikinci tarafsız denklemin genel çözümü biliniyor ise, ikinci taraflı denklemin çözümü integral işlemleri ile elde edilebilir. Bu yol, birinci mertebeden lineer denklemlerin çözümü için verilmiş sabitin değişimi kuralının, ikinci mertebeden lineer denklemlere uygulanmış şeklidir.

$$Ay'' + By' + Cy = f(x)$$

denkleminin çözümü istensin. Bu denklemin ikinci tarafsızı olan

$$Ay'' + By' + Cy = 0$$

denkleminin genel çözümü

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

olsun. Lagrange şu soruyu ortaya atarak ikinci taraflı denklemin genel çözümünü bulmak yoluna gitmiştir. *İkinci tarafsız denklemin genel çözümü olan* $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ *bağıntısındaki* c_1, c_2 *sabitleri nasıl* $c_1(x)$, $c_2(x)$ *fonksiyonları olmalıdır ki, bu bağıntı ikinci taraflı denklemin genel çözümü olsun.* c_1 ve c_2 iki tane bilinmiyen fonksiyon olduklarından, bu fonksiyonları, sağlama şartından başka bir bütünler şarta bağlı kılabiliriz. Bu şart, y nin türevlerinde c_1 ve c_2 lerin türevleri bulunmayacak şekilde seçilir.

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

den türev alarak

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_1' y_1 + c_2' y_2$$

elde edilir. Bütünler şart olarak

$$\boxed{c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0}$$

seçilirse

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$$

olur. Bu takdirde

$$y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1' y_1' + c_2' y_2'$$

dir. y, y', y'' nün bu ifadeleri ikinci taraflı denklemde yerlerine konursa,

$$A(c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1' y_1' + c_2' y_2') + B(c_1 y_1' + c_2 y_2') + C(c_1 y_1 + c_2 y_2) = f(x)$$

$$(Ay_1'' + By_1' + Cy_1)c_1 + (Ay_2'' + By_2' + Cy_2)c_2 + Ac_1' y_1' + Ac_2' y_2' = f(x)$$

ve y_1, y_2 ikinci tarafsız denklemin çözümleri olduklarından

$$Ay_1'' + By_1' + Cy_1 = 0$$

$$Ay_2'' + By_2' + Cy_2 = 0$$

olup

$$\boxed{Ac_1'y_1' + Ac_2'y_2' = f(x)}$$

elde edilir. Bu bağıntı ile yukardaki bütünler şartın meydana getirdiği

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$$

$$Ac_1'y_1' + Ac_2'y_2' = f(x)$$

denklem sisteminden c_1' , c_2' çözülür ve integralleri alınarak c_1 ve c_1 bulunur. Denklem sisteminden

$$c_1' = \varphi_1(x) \quad , \quad c_2' = \varphi_2(x)$$

bulunmuş ise

$$c_1 = \int \varphi_1(x)\, dx + K_1 \quad ; \quad c_2 = \int \varphi_2(x)\, dx + K_2$$

olarak

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

bağıntısında yerlerine konursa, ikinci taraflı denklemin genel çözümü elde edilmiş olur.

İHTAR.

$$c_1 = \int \varphi_1(x)\, dx + K_1 \quad , \quad c_2 = \int \varphi_2(x)\, dx + K_2$$

bağıntılarında, $K_1 = K_2 = 0$ *yapılırsa, bu suretle elde edilen* c_1 , c_2 *lerin* $y = c_1y_1 + c_2y_2$ *de yerlerine konulması halinde, ikinci taraflı denklemin özel çözümü elde edilmiş olur.*

ÖRNEK 11. $y'' + y = \operatorname{tg} x$ diferansiel denklemini çözünüz.

$y'' + y = 0$ denkleminin karakteristik denklemi $r^2 + 1 = 0$ ve kökleri $r = \pm i$ olup genel çözümü

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

dir. Şimdi bu bağıntının, ikinci taraflı denklemin genel çözümü olabilmesi için, c_1 ve c_2 nin ne şekilde fonksiyonlar olması gerektiğini bulmak üzere, sabitin değişimi kuralını uygulayalım.

$$y' = c_1 \cos x - c_2 \sin x + c_1' \sin x + c_2' \cos x$$

olup bütünler şart olarak,

$$c_1' \sin x + c_2' \cos x = 0$$

seçilirse

$$y' = c_1 \cos x - c_2 \sin x$$

olur. Buna göre

$$y'' = - c_1 \sin x - c_2 \cos x + c_1' \cos x - c_2' \sin x$$

olup y, y', y'' nün bu ifadeleri ikinci taraflı denklemde yerlerine konursa, sağlama şartı olarak

$$- c_1 \sin x - c_2 \cos x + c_1' \cos x - c_2' \sin x + c_1 \sin x + c_2 \cos x = \text{tg}\, x$$
$$c_1' \cos x - c_2' \sin x = \text{tg}\, x$$

elde edilir. Şimdi de

$$c_1' \sin x + c_2' \cos x = 0$$
$$c_1' \cos x - c_2' \sin x = \text{tg}\, x$$

denklem sisteminden c_1' ve c_2' yü çözersek

$$c_1' = \sin x \quad , \quad c_2' = - \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos x - \sec x$$

bulunur. Bunlardan da

$$c_1 = - \cos x + K_1 \quad , \quad c_2 = \sin x - \log(\sec x + \text{tg}\, x) + K_2$$

elde edilir. c_1, c_2 nin bu ifadeleri

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

ifadesinde yerlerine konursa verilen denklemin genel çözümü olarak

$$y = K_1 \sin x + K_2 \cos x - \cos x \log(\sec x + \operatorname{tg} x)$$

bulunur.

ÖRNEK 12. $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{e^{3x}}{x^2}$ denklemini çözünüz.

İkinci tarafsız denklemin karakteristik denklemi

$$r^2 - 6r + 9 = (r - 3)^2 = 0$$

ve kökleri $r = 3$ (iki katlı) olup genel çözümü

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{3x}$$

dir. Bu bağıntının, ikinci taraflı denklemin genel çözümü olabilmesi için, c_1 ve c_2 nin ne şekilde fonksiyonlar olması gerektiğini bulmak üzere sabitin değişimi kuralını uygulayalım.

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

$$y' = 3c_1 e^{3x} + (e^{3x} + 3x e^{3x}) c_2 + c_1' e^{3x} + c_2' x e^{3x}$$

olup bütünler şart olarak

$$c_1' e^{3x} + c_2' x e^{3x} = 0$$

seçilirse

$$y' = 3c_1 e^{3x} + (e^{3x} + 3x e^{3x}) c_2$$

olur. Buradan da,

$$y'' = 9c_1 e^{3x} + [3e^{3x} + (1 + 3x) 3e^{3x}] c_2 + 3c_1' e^{3x} + (1 + 3x) e^{3x} c_2'$$

dir. y ve türevleri diferansiel denklemde yerlerine konursa

$$3c_1 + (1 + 3x) c_2' = \frac{1}{x^2}$$

elde edilir. Böylece elde edilen,

$$c_1' e^{3x} + c_2' x e^{3x} = 0$$

$$3c_1' + (1 + 3x) c_2' = \frac{1}{x^2}$$

denklem sisteminden c_1' ve c_2' yü çözersek,

$$c_1' = -\frac{1}{x} \qquad c_2' = \frac{1}{x^2}$$

ve bunlardan da

$$c_1 = -\log x + K \quad , \quad c_2 = -\frac{1}{x} + K_2$$

elde edilir. c_1 ve c_2 nin bu ifadeleri

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{3x}$$

bağıntısında yerlerine konulursa, verilen denklemin genel çözümü olarak

$$y = K_1 e^{3x} + K_2 x e^{3x} - e^{3x} \log x$$

bulunur.

21.5 n. mertebeden lineer ve sabit katsayılı diferansiel denklemler.

Daha evvel de belirttiğimiz gibi n. mertebeden lineer ve sabit katsayılı diferansiel denklem

$$\boxed{A_0 \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = f(x)}$$

şeklindedir. $f(x) \neq 0$ ise denklem, *ikinci taraflı denklem* adını alır. $f(x) \equiv 0$ ise denkleme *homojen* veya *ikinci tarafsız denklem* denir.

21.5 - 1. n. mertebeden lineer ve sabit katsıyılı ikinci tarafsız diferansiel denklemin çözümü.

$$A_0 \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0$$

denkleminin çözümleri de, ikinci mertebede olduğu gibi, K bir keyfi sabit olarak

$$y = K e^{rx}$$

şeklindedir. Şimdi bu bağıntının denklemi sağlaması için r in ne olması gerektiğini araştıralım.

$$y = k e^{rx} \quad , \quad y' = K r e^{rx} \quad , \ldots , \quad y^{(n-1)} = K r^{n-1} e^{rx} \quad , \quad y^{(n)} = K r^n e^{rx}$$

olarak denklemde yerlerine konursa

$$(A_0 r^n + A_1 r^{n-1} + \ldots + A_{n-1} r + A_n) K e^{rx} \equiv 0$$

elde edilir. Bu özdeşliğin sağlanması için

$$A_0 r^n + A_1 r^{n-1} + \ldots + A_{n-1} r + A_n = 0$$

olması gerekir. O halde r bu denklemin bir kökü olmalıdır. İkinci mertebede olduğu gibi, bu denkleme ikinci tarafsız denklemin *karakteristik denklemi* denir. Böyle bir cebirsel denklemin, n tane kökü olacağına göre, denklemin de n tane çözümü yazılabilir. Lineer olarak bağımsız n çözüm

$$y_1 \quad , \quad y_2 \quad , \ldots , \quad y_n$$

ise denklemin genel çözümü

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

dir. c_1 , c_2 , ... , c_n ler keyfi sabitlerdir.

O halde çözümün şekli, karakteristik denklemin köklerine bağlıdır. Bu köklerin değişik şekillerine göre, ikinci tarafsız lineer ve sabit katsayılı bir denklemin genel çözümü için aşağıdaki teorem söylenebilir.

TEOREM.

$$A_0 \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0$$

diferansiel denkleminin karakteristik denklemi olan

$$A_0 r^n + A_1 r^{n-1} + \ldots + A_{n-1} r + A_n = 0$$

denkleminin,

reel kökleri	r_1 ,	r_2 ,	$\ldots$,	r_l
katlılık mertebeleri	α_1 ,	α_2 ,	$\ldots$,	α_l
kompleks kökleri	$a_1 \pm b_1 i$,	$a_2 \pm b_2 i$,	$\ldots$,	$a_m \pm b_m i$
katlılık mertebeleri	β_1 ,	β_2 ,	$\ldots$,	β_m

ise diferansiel denklemin genel çözümü

$$\boxed{y = \sum_{k=1}^{l} e^{r_k x} P_{\alpha_k - 1}(x) + \sum_{k=1}^{m} e^{a_k x} [S_{\beta_k - 1}(x) \sin b_k x + T_{\beta_k - 1}(x) \cos b_k x]}$$

dir. P, S, T *ler dereceleri indislerine eşit* x *in tam çok terimlileridir.*

Formüldeki birinci toplam reel köklere, ikinci toplam kompleks köklere karşılıktır.

ÖRNEK 1. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$ diferansiel denklemini çözünüz.

Karakteristik denklem

$$r^3 - r^2 - 4r + 4 = (r-1)(r-2)(r+2) = 0$$

ve kökleri

$$r_1 = -2 \ , \ r_2 = 1 \ , \ r_3 = 2$$

olup

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x}$$

dir. Bu örnekte $l = 3$, $\alpha_k = 1$ dir.

ÖRNEK 2. $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$ diferansiel denklemini çözünüz.

Karakteristik denklem

$$r^3 - 2r^2 - 4r + 8 = (r - 2)^2 (r + 2) = 0$$

ve kökleri $r_1 = -2$, $r_2 = 2$ (iki katlı) olup

$$y = c_1 e^{-2x} + (c_2 + c_3 x) e^{2x}$$

dir. Bu örnekte $l = 2$; $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $P_{\alpha_1 - 1}(x) = c_1$, $P_{\alpha_2 - 1}(x) = c_2 + c_3 x$ dir.

ÖRNEK 3. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ diferansiel denklemini çözünüz.

Karakteristik denklem

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = (r - 1)^3 = 0$$

ve kökleri $r = 1$ (üç katlı) olup

$$y = (c_1 x^2 + c_2 x + c_3) e^{x}$$

dir. Bu örnekte $l = 1$, $\alpha = 3$, $P_2(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$ dir.

ÖRNEK 4. $y^{IV} + 6y''' + 5y'' - 24y' - 36y = 0$ diferansiel denklemini çözünüz.

Karakteristik denklem

$$r^4 + 6r^3 + 5r^2 - 24r - 36 = (r + 3)^2 (r + 2)(r - 2) = 0$$

ve kökleri $r_1 = -3$ (iki katlı), $r_2 = -2$, $r_3 = 2$ olup

$$y = (c_1 x + c_2) e^{-3x} + c_3 e^{-2x} + c_4 e^{2x}$$

dir. Bu örnekte, $l = 3$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$, $P_{\alpha_1 - 1}(x) = c_1 x + c_2$, $P_{\alpha_2 - 1}(x) = c_3$, $P_{\alpha_3 - 1}(x) = c_4$ dür.

ÖRNEK 5. $y''' + 4y' = 0$ diferansiel denklemini çözünüz.

Karakteristik denklem

$$r^3 + 4r = r(r^2 + 4) = 0$$

ve kökleri $r_1 = 0$ ve $\pm 2i$ olup

$$y = c_1 + c_2 \sin 2x + c_3 \cos 2x$$

dir. Bu örnekte $l = 1$, $\alpha_1 = 1$, $a_1 = 0$, $b_1 = 2$, $\beta_1 = 1$, $m = 1$, $P_{\alpha_1 - 1}(x) = c_1$, $S_{\beta_1 - 1}(x) = c_2$, $T_{\beta_1 - 1}(x) = c_3$ dir.

ÖRNEK 6. $y^{IV} + 5y'' - 36y = 0$ diferansiel denklemini çözünüz.

Karakteristik denklem

$$r^4 + 5r^2 - 36 = (r^2 - 4)(r^2 + 9) = 0$$

ve kökleri $r_1 = -2$, $r_2 = 2$ ve $\pm 3i$ olup

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 \sin 3x + c_4 \cos 3x$$

dir. Bu örnekte $l = 2$, $m = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $a_1 = 0$, $b_1 = 3$, $\beta_1 = 1$, $P_{\alpha_1 - 1}(x) = c_1$, $P_{\alpha_2 - 1}(x) = c_2$, $S_{\beta_1 - 1}(x) = c_3$, $T_{\beta_1 - 1}(x) = c_4$ dür.

ÖRNEK 7. $y^{IV} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25y = 0$ diferansiel denklemini çözünüz.

Karakteristik denklem

$$r^4 - 4r^3 + 14r^2 - 20r + 25 = (r^2 - 2r + 5)^2 = 0$$

ve kökleri $1 \pm 2i$ (iki katlı) olup

$$y = e^x [(c_1 x + c_2) \sin 2x + (c_3 x + c_4) \cos 2x]$$

dir. Bu örnekte $m = 1$, $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $\beta_1 = 2$, $S_{\beta_1 - 1}(x) = c_1 x + c_2$, $T_{\beta_1 - 1}(x) = c_3 x + c_4$ dür.

21.5 - 2. n. mertebeden lineer ve sabit katsayılı ikinci taraflı denklemin çözümü.

$$A_0 \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n\, y = f(x)$$

n. mertebeden sabit katsayılı ve ikinci taraflı lineer bir denklemin genel çözümü, ikinci mertebeden, aynı tipte diferansiel denklemin çözümüne uygulanan kurallarla elde edilir.

Bu kurallardan birincisine göre, ikinci taraflı denklemin bir özel çözümü kolayca bulunduğu takdirde, bu özel çözümü, ikinci tarafsız denklemin genel çözümü ile toplamak suretile, ikinci taraflı denklemin genel çözümü bulunur.

İkinci tarafı oluşturan $f(x)$ in bazı belirli şekilleri için doğrudan doğruya bir özel çözüm bulmak mümkündür. Şimdi bu şekillerin en önemlilerini gözden geçireceğiz.

Özel Çözümler :

1. $f(x) = B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \ldots + B_p$ *şeklinde ise* y_2 *özel çözümü, aynı dereceden bir çok terimli, yani*

$$y_2 = c_0 x^p + c_1 x^{p-1} + \ldots + c_p$$

şeklindedir.

Ancak, r^m *karakteristik denklemin bir çarpanı yani,* $r = 0$ *karakteristik denklemin* m *katlı bir kökü ise, özel çözüm*

$$y_2 = x^m (c_0 x^p + c_1 x^{p-1} + \ldots + c_p)$$

şeklindedir. $c_0, c_1, \ldots, c_p$ *ler belirtilmesi gereken sabitlerdir.*

2. $\boxed{f(x) = D\,e^{\alpha x}}$ *şeklinde ise* y_2 *özel çözümü,*

$$y_2 = K\,e^{\alpha x}$$

şeklindedir. Ancak, $(r - \alpha)^m$ *karakteristik denklemin bir çarpanı, yani* $r = \alpha$ *karakteristik denklemin* m *katlı bir kökü ise, özel çözüm*

$$y_2 = K\,x^m\,e^{\alpha x}$$

şeklindedir. K *belirtilmesi gereken bir sabittir.*

3. $f(x) = M \sin px$ *veya* $M \cos px$ *veyahut da*

$$\boxed{f(x) = M \sin px + N \cos px}$$

şeklinde ise özel çözüm

$$y_2 = A \sin px + B \cos px$$

şeklindedir. Ancak, $(r^2 + p^2)^m$ *karakteristik denklemin bir çarpanı ise özel çözüm,*

$$y_2 = x^m (A \sin px + B \cos px)$$

şeklindedir. A *ve* B *belirtilmesi gereken sabitlerdir.*

4. $\boxed{f(x) = e^{\alpha x}\,\varphi(x)}$ *şeklinde ise,* $y = Ze^{\alpha x}$ *dönüştürmesi yapılır ve denklemin her iki tarafı* $e^{\alpha x}$ *le bölünerek,* Z *i bilinmiyen kabul eden bir diferansiel denkleme varılır.*

5. $f(x)$ *birkaç fonksiyonun toplamı şeklinde ise özel çözüm, bu fonksiyonların herbirine karşılık gelen özel çözümlerin toplamına eşittir.*

ÖRNEK 1. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = x^2 + x$ diferansiel denklemini çözünüz.

1. İkinci tarafsız denklemin genel çözümü :

Karakteristik denklem

$$r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)^2 = 0$$

ve kökleri $r = \pm i$ (iki katlı) olup

$$y_1 = (c_1 x + c_2)\sin x + (c_3 x + c_4)\cos x$$

dir.

2. İkinci taraflı denklemin özel çözümü :

$$y_2 = ax^2 + bx + c$$

şeklinde olup a, b, c yi belirtmek üzere, y_2 nin denklemi sağlama şartını yazarsak

$$y_2' = 2ax + b \quad , \quad y_2'' = 2a \quad , \quad y_2''' = 0 \quad , \quad y_2^{\text{IV}} = 0$$

$$ax^2 + bx + 4a + c \equiv x^2 + x$$

$$a = 1 \quad , \quad b = 1 \quad , \quad 4a + c = 0 \quad , \quad c = -4$$

bulunur. Buna göre özel çözüm

$$y_2 = x^2 + x - 4$$

dir.

3. İkinci taraflı denklemin genel çözümü :

$$y = y_1 + y_2$$

olup

$$y = (c_1 x + c_2)\sin x + (c_3 x + c_4)\cos x + x^2 + x - 4$$

dür.

ÖRNEK 2. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^{3x}$ diferansiel denklemini çözünüz.

1. İkinci tarafsız denklemin genel çözümü :

Karakteristik denklem

$$r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = (r-1)(r-3)(r+2) = 0$$

ve kökleri $r_1 = 1$, $r_2 = 3$, $r_3 = -2$ olup

$$y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x}$$

dir.

2. İkinci taraflı denklemin özel çözümü :

$\alpha = 3$ karakteristik denklemin bir kökü olup özel çözüm

$$y_2 = K\, x\, e^{3x}$$

şeklindedir. K yı belirtmek üzere, y_2 nin diferansiel denklemi sağlama şartını yazarsak,

$$y_2' = 3K\, x\, e^{3x} + K\, e^{3x} \quad ; \quad y_2'' = 9K\, x\, e^{3x} + 6K\, e^{3x}$$

$$y_2''' = 27K\, x\, e^{3x} + 27K\, e^{3x}$$

ve

$$10K\, e^{3x} \equiv e^{3x}$$

olarak, $K = \dfrac{1}{10}$ bulunur. Buna göre özel çözüm

$$y_2 = \frac{1}{10}\, x\, e^{3x}$$

dir.

3. İkinci taraflı denklemin genel çözümü :

$$y = y_1 + y_2$$

olup

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x} + \frac{x}{10} e^{3x}$$

dir.

ÖRNEK 3 $\frac{d^4y}{dx^4} + 4\frac{d^3y}{dx^3} = 4\cos 4x$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

1. İkinci tarafsız denklemin genel çözümü :

Karakteristik denklem

$$r^4 + 4r^3 = r^3(r+4) = 0$$

ve kökleri $r_1 = 0$ (üç katlı), $r_2 = -4$ olup

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-4x}$$

dir.

2. İkinci taraflı denklemin özel çözümü :

$$y_2 = A\sin 4x + B\cos 4x$$

şeklinde olup A ve B yi belirtmek üzere y_2 nin diferansiel denklemi sağlama şartını yazarsak,

$$y_2' = 4A\cos 4x - 4B\sin 4x \quad ; \quad y_2'' = -16A\sin 4x - 16B\cos 4x$$
$$y_2''' = -64A\cos 4x + 64B\sin 4x \quad ; \quad y_2^{IV} = 256A\sin 4x + 256B\cos 4x$$

olup

$$(256A + 256B)\sin 4x + (-256A + 256B)\cos 4x \equiv 4\cos 4x$$
$$256A + 256B = 0 \quad ; \quad -256A + 256B = 4$$
$$A = -\frac{1}{128} \quad , \quad B = \frac{1}{128}$$

bulunur. Bunlara göre özel çözüm,

$$y_2 = \frac{1}{128}(\cos 4x - \sin 4x)$$

dir.

3. İkinci taraflı denklemin genel çözümü

$$y = y_1 + y_2$$

olup

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4\,e^{-4x} + \frac{1}{128}(\cos 4x - \sin 4x)$$

dir.

ÖRNEK 4. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 5\,e^x \sin x$ diferansiel denklemini çözünüz.

1. İkinci tarafsız denklemin genel çözümü :

Karakteristik denklem

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r+1)^3 = 0$$

ve kökleri $r = -1$ (üç katlı) olup

$$y_1 = (c_1 + c_2x + c_3x^2)\,e^{-x}$$

dir.

2. İkinci taraflı denklemin özel çözümü :

Denklemde $y = Z\,e^x$ dönüştürmesi yapılırsa

$$y' = Z'\,e^x + Z\,e^x \quad , \quad y'' = Z''\,e^x + 2Z'\,e^x + Z\,e^x$$

$$y''' = Z'''\,e^x + 3Z''\,e^x + 3Z'\,e^x + Z\,e^x$$

olarak

$$Z''' + 6Z'' + 12Z' + 8Z = 5\sin x$$

elde edilir. Bu denklemi sağlıyan Z olarak, özel çözüm seçilirse

$$Z = A\sin x + B\cos x$$

şeklinde olur. A ve B yi belirtmek üzere sağlama şartını yazarsak

$$Z' = A\cos x - B\sin x \quad , \quad Z'' = -A\sin x - B\cos x$$

$$Z''' = -A\cos x + B\sin x$$

olup

$$(2A - 11B)\sin x + (11A + 2B)\cos x = 5\sin x$$

$$2A - 11B = 5 \quad , \quad 11A + 2B = 0$$

$$A = \frac{2}{25} \quad , \quad B = -\frac{11}{25}$$

bulunur. Buna göre

$$Z = \frac{1}{25}(2\sin x - 11\cos x)$$

olarak ikinci taraflı denklemin özel çözümü

$$y_2 = Z\,e^x = \frac{e^x}{25}(2\sin x - 11\cos x)$$

dir.

3. İkinci taraflı denklemin genel çözümü :

$$y = y_1 + y_2$$

olup

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)\,e^{-x} + \frac{e^x}{25}(2\sin x - 11\cos x)$$

dir.

ÖRNEK 5. $y^{IV} + 2y''' - 3y'' = x^2 + 3\,e^{2x} + 4\sin x$ diferansiel denklemini çözünüz.

1. İkinci tarafsız denklemin genel çözümü :

Karakteristik denklem

$$r^4 + 2r^3 - 3r^2 = r^2(r+3)(r-1) = 0$$

ve kökleri $r_1 = 0$ (iki katlı), $r_2 = 1$, $r_3 = -3$ olup

$$y_1 = c_1 + c_2 x + c_3\,e^{-3x} + c_4\,e^x$$

dir.

2. İkinci taraflı denklemin özel çözümü :

$$y_2 = y_{21} + y_{22} + y_{23}$$

şeklinde üç kısımdan oluşur.

y_{21}, ikinci tarafta bulunan x^2 li terime ait bir özel çözüm olup $r = 0$ karakteristik denklemin iki katlı bir kökü olduğundan

$$y_{21} = x^2(ax^2 + bx + c) = ax^4 + bx^3 + cx^2$$

şeklindedir. a, b, c yi belirtmek üzere sağlama şartı yazılırsa

$$y_{21}' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx \quad ; \quad y_{21}'' = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

$$y_{21}''' = 24ax + 6b \quad ; \quad y_{21}^{IV} = 24a$$

olup

$$-36ax^2 + (48a - 18b)\,x + 24a + 12b - 6c \equiv x^2$$

$$a = -\frac{1}{36} \quad , \quad b = -\frac{2}{27} \quad , \quad c = -\frac{7}{27}$$

bulunur. Buna göre

$$y_{21} = -\frac{x^2}{108}(3x^2 + 8x + 28)$$

dir.

y_{22} ise ikinci taraftaki $3\,e^{2x}$ terimine ait bir özel çözüm olup

$$y_{22} = K\,e^{2x}$$

şeklindedir. K yı belirtmek üzere sağlama şartı yazılırsa

$$y_{22}' = 2K\,e^{2x} \quad , \quad y_{22}'' = 4K\,e^{2x} \quad , \quad y_{22}''' = 8K\,e^{2x}$$

$$y_{22}^{IV} = 16K\,e^{2x}$$

olup

$$20K\, e^{2x} \equiv 3\, e^{2x}$$

$$K = \frac{3}{20}$$

bulunur. Buna göre

$$y_{22} = \frac{3}{20}\, e^{2x}$$

dir.

y_{23} ise ikinci taraftaki $4 \sin x$ terimine ait bir özel çözüm olup

$$y_{23} = A \sin x + B \cos x$$

şeklindedir. A ve B yi belirtmek üzere sağlama şartı yazılırsa

$$y_{23}' = A \cos x - B \sin x \quad , \quad y_{23}'' = - A \sin x - B \cos x$$
$$y_{23}''' = - A \cos x + B \sin x \quad ; \quad y_{23}^{IV} = A \sin x + B \cos x$$

olarak

$$(4A + 2B) \sin x + (- 2A + 4B) \cos x = 4 \sin x$$

ve

$$A = \frac{4}{5} \quad , \quad B = \frac{2}{5}$$

bulunur. Buna göre

$$y_{23} = \frac{2}{5}\,(2 \sin x + \cos x)$$

dir.

O halde ikinci taraflı denklemin özel çözümü

$$y_2 = - \frac{x^2}{108}\,(3x^2 + 8x + 28) + \frac{3}{20}\, e^{2x} + \frac{2}{5}\,(2 \sin x + \cos x)$$

dir.

3. İkinci taraflı denklemin genel çözümü :

$$y = y_1 + y_2$$

olup

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \,\mathrm{e}^{-3x} + c_4 \,\mathrm{e}^{x} - \frac{x^2}{108}(3x^2 + 8x + 28) +$$

$$\frac{3}{20}\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{2}{5}(2 \sin x + \cos x)$$

dir.

İkinci taraflı denklemin çözümü için genel kural.
Sabitin değişimi kuralı (Lagrange kuralı)

21.4-2. de, ikinci mertebeden sabit katsayılı ve ikinci taraflı denklemler için verilmiş olan sabitin değişimi kuralı, yüksek mertebeden denklemlere de uygulanabilir. Buna göre, n yinci mertebeden ikinci taraflı denklemin çözümü, ikinci tarafsız denklemin genel çözümü yardımiyle n tane integral işlemine dönüştürülebilir.

$$A_0 \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + A_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \ldots + A_{n-1} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + A_n \, y = 0$$

denkleminin genel çözümü

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

olsun. Lagrange şu soruyu ortaya atarak ikinci taraflı denklemin çözümünü bulmak yoluna gitmiştir. İkinci tarafsız denklemin genel çözümü olan

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

bağıntısındaki $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sabitleri nasıl $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$ fonksiyonları olmalıdır ki, bu bağıntı ikinci taraflı denklemin çözümü olsun. $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ler n tane bilinmiyen fonksiyonlar olduklarından bu fonksiyonları, sağlama şartından başka, $n-1$ tane bütünler şarta bağlı kılabiliriz. Bu şartlar, y nin ilk $n-1$ türevinde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ lerin türevleri bulunmayacak şekilde seçilir. Bu takdirde y nin türevleri

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + \dots + c_n y_n'$$
$$y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + \dots + c_n y_n''$$
$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$
$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$
$$y^{(n-1)} = c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)}$$

olur. c_i lerin tâbi olacağı bütünler şartlar ise

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 + \dots + c_n' y_n = 0$$
$$c_1' y_1' + c_2' y_2' + \dots + c_n' y_n' = 0$$
$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$
$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$
$$c_1' y_1^{(n-2)} + c_2' y_2^{(n-2)} + \dots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0$$

dır. Şimdi de $y^{(n)}$ türevini elde edelim.

$$y^{(n)} = c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)} + \dots + c_n y_n^{(n)} + c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)}$$

dir. $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ nin değerlerini çözümünü aradığımız

$$A_0 \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = f(x)$$

denkleminde yerlerine koyarak, sağlama şartını bulalım. Bu takdirde,

$$c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} = f(x)/A_0$$

elde edilir. Bu bağıntı ile yukarıdaki $n-1$ bütünler şartın meydana getirdiği

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 + \dots + c_n' y_n = 0$$
$$c_1' y_1' + c_2' y_2' + \dots + c_n' y_n' = 0$$
$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$
$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$
$$c_1' y_1^{(n-2)} + c_2' y_2^{(n-2)} + \dots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0$$
$$c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} = f(x)/A_0$$

denklem sisteminden $c_1', c_2', \dots, c_n'$ ler çözülürse

$$c_1' = \varphi_1(x) \qquad c_2' = \varphi_2(x), \dots\dots, c_n' = \varphi_n(x)$$

bağıntıları elde edilir. Bunlardan, integral işlemleri yardımı ile c_i ler hesaplanırsa :

$$c_1 = \int \varphi_1(x)\, dx + K_1 \quad , \quad c_2 = \int \varphi_2(x)\, dx + K_2 \ , \ldots , \ c_n = \int \varphi_n(x)\, dx + K_n$$

elde edilir. Bunlar da ikinci tarafsız denklemin genel çözümü olan

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

ifadesinde yelerine konursa

$$y = K_1 y_1 + K_2 y_2 + \ldots + K_n y_n + y_1 \int \varphi_1(x)\, dx + \ldots + y_n \int \varphi_n(x)\, dx$$

şeklinde ikinci taraflı denklemin *genel çözümü* elde edilir. Burada

$$K_1 = K_2 = \ldots \ldots = K_n = 0$$

seçilirse elde edilecek olan

$$y = y_1 \int \varphi_1(x)\, dx + y_1 \int \varphi_2(x)\, dx + \ldots + y_n \int \varphi_n(n)\, dx$$

ifadesi ikinci taraflı denklemin *özel çözümü* olur.

ÖRNEK. $y''' + y' = \operatorname{cosec} x$ diferansiel denklemini çözünüz.

$y''' + y' = 0$ denkleminin, karakteristik denklemi

$$r^3 + r = r(r^2 + 1) = 0$$

ve kökleri $r = 0$, $r = \pm i$ olup genel çözümü

$$y = c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x$$

dir. Şimdi, bu ifadenin verilen diferansiel denklemin genel çözümü olabilmesi için, c_1, c_2, c_3 ün nasıl fonksiyonlar olması gerektiğini bulmak üzere sabitin değişimi kuralını uygulayalım.

$$y' = c_2 \cos x - c_3 \sin x + c_1' + c_2' \sin x + c_3' \cos x$$

olup bütünler şart olarak

$$c_1' + c_2' \sin x + c_3' \cos x = 0$$

seçilirse

$$y' = c_2 \cos x - c_3 \sin x$$

olur. Buna göre

$$y'' = -c_2 \sin x - c_3 \cos x + c_2' \cos x - c_3' \sin x$$

olup ikinci bütünler şart olarak

$$c_2' \cos x - c_3' \sin x = 0$$

seçilirse

$$y'' = -c_2 \sin x - c_3 \cos x$$

elde edilir. Buradan da,

$$y''' = -c_2 \cos x + c_3 \sin x - c_2' \sin x - c_3' \cos x$$

olup y, y', y'', y''' lerin yukarıdaki ifadeleri verilen diferansiel denklemde yerlerine konursa sağlama şartı olarak ta

$$-c_2' \sin x - c_3' \cos x = \operatorname{cosec} x$$

ifadesi elde edilir. Şimdi de iki bütünler şart ve sağlama şartının meydana getirdiği

$$\begin{aligned} c_1' + c_2' \sin x + c_3' \cos x &= 0 \\ c_2' \cos x - c_3' \sin x &= 0 \\ -c_2' \sin x - c_3' \cos x &= \operatorname{cosec} x \end{aligned}$$

denklem sisteminden c_1', c_2', c_3' yü çözersek,

$$c_1' = \operatorname{cosec} x \quad , \quad c_2' = -1 \quad , \quad c_3' = -\operatorname{cotg} x$$

ve bunlardan da

$$c_1 = \log(\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x) + K_1 \quad ; \quad c_2 = -x + K_2 \quad ;$$

$$c_3 = -\log \sin x + K_3$$

elde edilir. c_1, c_2, c_3 ün bu ifadeleri

$$y = c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x$$

ifadesinde yerlerine konursa, verilen denklemin genel çözümü olarak,

$$y = K_1 + K_2 \sin x + K_3 \cos x + \log(\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x) - \cos x \log \sin x - x \sin x$$

bulunur.

21.6 Değişken katsayılı lineer diferansiel denklemler.

$$A_0 \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = f(x)$$

denkleminde A_i ler x in fonksiyonları ise, bu denklem *değişken katsayılı lineer diferansiel denklem* adını alır.

$f(x) \equiv 0$ ise ikinci tarafsız denklem elde edilir.

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ ikinci tarafsız denklemin n çözümü ise

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

ikinci tarafsız denklemin genel çözümüdür. u, ikinci taraflı denklemin bir özel çözümü ise

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n + u$$

ikinci faraflı denklemin genel çözümüdür. Bu çözümü elde etmek için genel bir kural yoktur. Ancak, bazı özel hallere uygulanabilecek özel kurallar vardır. Biz bunlardan birini inceliyeceğiz.

21.6 - 1. Euler (veya Cauchy) diferansiel denklemi.

$$\boxed{A_0\, x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1\, x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1}\, x \frac{dy}{dx} + A_n\, y = f(x)}$$

şeklindeki lineer denklem *Euler denklemi* adını alır. Bu denklemde $x = e^t$ dönüştürmesi yapılırsa, denklem sabit katsayılı lineer denkleme dönüşür.

$$x = e^t \quad \text{ise} \quad t = \log x$$

olur.

$$D_x\, y = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} D_t\, y = e^{-t} D_t\, y$$

olup

$$\boxed{x\, D_x\, y = D_t\, y}$$

dir. $\left(D_x = \dfrac{d}{dx}\right.$, $\left. D_t = \dfrac{d}{dt}\right.$ türetme operatörleridir.)

$$D_x^2\, y = \frac{d^2 y}{dx^2} = D_x\, D_x\, y = e^{-t} D_t\,(e^{-t} D_t\, y)$$

$$= e^{-t}(-\,e^{-t} D_t + e^{-t} D_t^2)\, y = e^{-2t}(D_t^2 - D_t)\, y$$

ve buradan

$$\boxed{x^2\, D_x^2\, y = (D_t^2 - D_t)\, y = D_t\,(D_t - 1)\, y}$$

dır.

$$D_x^3\, y = \frac{d^3 y}{dx^3} = D_x\, D_x^2\, y = e^{-t} D_t\,[e^{-2t}(D_t^2 - D_t)\, y]$$

$$= e^{-t}[-\,2\, e^{-2t}(D_t^2 - D_t)\, y + e^{-2t}(D_t^3 - D_t^2)\, y]$$

$$= e^{-3t}(D_t^3 - 3D_t^2 + 2D_t)\, y = e^{-3t} D_t\,(D_t - 1)(D_t - 2)\, y$$

ve buradan

$$\boxed{x^3\, D_x^3\, y = D_t\,(D_t - 1)\,(D_t - 2)\, y}$$

ve böyle devam edilirse

$$\boxed{x^k D_x^k y = D_t(D_t - 1)(D_t - 2) \ldots (D_t - k + 1)\, y}$$

formülü elde edilir.

Bunlar Euler denkleminde yerlerine konursa denklem

$$[A_0 D_t(D_t - 1) \ldots (D_t - n + 1) + A_1 D_t(D_t - 1) \ldots (D_t - n + 2) + \\ \ldots + A_{n-1} D_t + A_n]\, y = f(e^t)$$

şeklini alır ki bu da sabit katsayılı bir lineer diferansiel denklemdir.

ÖRNEK 1. $x^3 \dfrac{d^3y}{dx^3} + 5x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 3x \dfrac{dy}{dx} = x^2$ diferansiel denklemini çözünüz.

$x = e^t$ dönüştürmesi yapılırsa $t = \log x$ olarak denklem

$$[D_t(D_t - 1)(D_t - 2) + 5D_t(D_t - 1) + 3D_t]\, y = e^{2t}$$

$$(D_t^3 + 2D_t^2)\, y = e^{2t}$$

şeklini alır. Bu ise

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2y}{dt^2} = e^{2t}$$

şeklinde sabit katsayılı lineer bir diferansiel denklem olup, genel çözümü bulunur ve $t = \log x$, $e^t = x$ olduğu göz önüne alınırsa verilen denklemin genel çözümü olarak

$$y = c_1 + c_2 \log x + \frac{c_3}{x^2} + \frac{1}{16} x^2$$

elde edilir.

21.7 Diferansiel denklem sistemleri.

21.7 - 1. Tanımlar.

x bağımsız değişkenini, x in bilinmiyen $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonlarını ve bu fonksiyonların muhtelif mertebeden türevlerini içeren

$$
(1) \quad
\begin{aligned}
&f_1(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_2, y_2', \dots, y_n, y_n', \dots) = 0 \\
&f_2(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_2 . y_2', \dots, y_n, y_n', \dots) = 0 \\
&\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
&\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
&f_n(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_2, y_2', \dots, y_n, y_n', \dots) = 0
\end{aligned}
$$

şeklindeki n denklemden oluşan bir sisteme *adi diferansiel denklem sistemi* denir. Bu sistemde bilinmiyen fonksiyon sayısı kadar denklem vardır. Eğer, $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, ... , $y_n = \varphi_n(x)$ gibi n fonksiyon (1) sisteminin denklemlerini özdeş olarak sağlıyorlarsa, bu sistemin bir çözümüdürler.

Bir sistemde, denklem sayısı bilinmiyen fonksiyonların sayısına eşit ve sistemin her denklemi bilinmiyen fonksiyonlardan birinin en yüksek mertebeli türevine göre çözülmüşse sisteme, *kanonik sistem* denir. Buna göre kanonik sistem aşağıdaki üç şartı sağlar.

1) Denklem sayısı, bilinmiyen sayısına eşit olacak;

2) Denklemlerden herbiri, bilinmiyen fonksiyonlardan birinin, sistemde mevcut en yüksek mertebeli türevine göre çözülmüş olacak;

3) Birinci taraflardaki türevler ikinci taraflarda bulunmayacak.

ÖRNEK.

$$
(2) \quad
\begin{aligned}
y_1'' &= f_1(x, y_1, y_1', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3') \\
y_2''' &= f_2(x, y_1, y_1', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3') \\
y_3'' &= f_3(x, y_1, y_1', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3')
\end{aligned}
$$

sistemi kanonik bir sistemdir.

Yalnız birinci mertebeden türevleri içeren bir kanonik sisteme *normal sistem* denir. Buna göre normal sistem aşağıdaki şartları sağlar.

1) Denklem sayısı, bilinmiyen sayısına eşit olacak;

2) Denklemlerden herbiri, bilinmiyen fonksiyonlardan birinin, birinci mertebeden türevine göre çözülmüş olacak;

3) İkinci taraflarda türevler bulunmayacak.

n tane bilinmiyen fonksiyonu içeren bir normal sistem

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\
&\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \ldots, y_n)
\end{aligned} \tag{3}$$

şeklindedir.

TEOREM 1. Bir kanonik sistem, daima normal bir sisteme dönüştürülebilir.

Bu teoremin ispatını, yukarıdaki örnek olarak ele aldığımız (2) sistemi üzerinde gösterelim.

$$\begin{aligned}
y_1'' &= f_1(x, y_1, y_1', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3') \\
y_2''' &= f_2(x, y_1, y_1', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3') \\
y_3'' &= f_3(x, y_1, y_1', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3')
\end{aligned}$$

sisteminde

$$y_1' = y_4 \quad , \quad y_2' = y_5 \quad , \quad y_2'' = y_6 \quad , \quad y_3' = y_7$$

dönüştürmeleri yapılırsa sistem

$$\begin{aligned}
y_4' &= f_1(x, y_1, y_4, y_2, y_5, y_6, y_3, y_7) \\
y_6' &= f_2(x, y_1, y_4, y_2, y_5, y_6, y_3, y_7) \\
y_7' &= f_3(x, y_1, y_4, y_2, y_5, y_6, y_3, y_7)
\end{aligned} \tag{4}$$

şekline girer. Bunlara

$$y_1' = y_4 \quad , \quad y_2' = y_5 \quad , \quad y_5' = y_6 \quad , \quad y_3' = y_7$$

denklemleri de eklenirse 7 bilinmiyenli 7 denklemden oluşan bir normal sistem elde edilmiş olur. Bu normal sistem, verilen kanonik sisteme denktir.

Bunlara göre, her (1) sistemi bir kanonik sisteme dönüştürülebileceğinden (1) sisteminin çözümü, bir normal sistemin çözümü yardımiyle elde edilebilir.

(1) sistemini bir normal sisteme yani birinci mertebe diferansiel denklemlerden oluşan bir sisteme dönüştürme halinde, sistemin bilinmiyen veya denklem sayısını elde etmek için, (1) sistemindeki bilinmiyenlere ait en yüksek mertebeli türevlerin mertebelerini toplamalıdır. Bu sayı, ***sistemin mertebesi*** adını aldığı gibi genel çözümdeki ***keyfi sabitlerin sayısını*** da verir.

Daha genel olarak (1) sistemi, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fonksiyonlarını ve bu fonksiyonların en yüksek mertebeli türevleri olarak $p, q, \ldots, r$ inci mertebeden türevlerini içeriyorsa

$$p + q + \ldots + r$$

tane birinci mertebe diferansiel denklemden oluşan bir sisteme dönüştürülmüş olacaktır. Bu halde sistem

$$y_1, y_1', \ldots, y_1^{(p-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(q-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(r-1)}$$

fonksiyonlarını bilinmiyen olarak içerecektir.

n. mertebeden bir normal sistemin, n keyfi sabite bağlı olarak

$$(5) \qquad \begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \\ y_2 &= \varphi_2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \end{aligned}$$

şeklinde bir çözüm takımının mevcut olduğu gösterilebilir. Bu çözüme, (3) sisteminin *genel çözümü* denir. (3) sisteminin bir *özel çözümü,* genel çözümdeki $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitlerine özel değerler vermek suretile elde edilir. (3) sisteminin *tekil çözümü* ise, keyfi sabit içermiyen ve genel çözümden elde edilemiyen bir çözümdür.

(3) sisteminin genel çözümü olan (5) denklemleri, $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitlerine göre çözülürse

$$c_k = F_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad ; \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

bağıntıları elde edilir. $F_1, F_2, \dots, F_n$ lerden herbirine (3) sisteminin *asal integrali* denir. Bu bağıntılar genel çözüme denktir. n tane asal integral birbirine bağlı değildir. Bağımsız asal integral sayısı n dir. İki veya daha fazla asal integralin herbir fonksiyonu yine asal integraldir. Buna göre asal integrallerin genel şekli

$$f(F_1, F_2, \dots, F_n)$$

dir. Örneğin

$$F_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = c_1 \quad , \quad F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = c_2$$

bağıntıları, (3) sisteminin farklı iki asal integrali ise

$$f(F_1, F_2)$$

de bir asal integraldir.

TEOREM 2. n. mertebeden bir normal sistemin

$$F(x, y_1, \dots, y_n) = c \tag{6}$$

şeklindeki bir asal integrali biliniyor ise, bu sistemin çözümü $n-1$ inci mertebeden bir normal sistemin çözümüne dönüştürülebilir.

Gerçekten, (6) dan y_1 çözülür ve (3) sisteminin son $n-1$ denkleminde yerine konursa $y_2, y_3, \dots, y_n$ leri bilinmiyen kabul eden $n-1$ inci mertebeden bir normal sistem elde edilir. Bu sistemin genel çözümü ile (6) çözümü n tane keyfi sabite bağlı n tane $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonlarını verir ki bunlar, (3) sistemini sağlarlar. O halde (3) sisteminin genel çözümünü oluştururlar.

Aynı şekilde, p tane asal integralin bilinmesi halinde, n. mertebeden bir normal sistemin çözümü, $n-p$ yinci mertebeden diğer bir normal sistemin çözümüne dönüştürülebilir.

21.7 - 2. Asal integrallerin hesabı.

Bir normal sistemin çözümü, asal integralleri hesaplamak suretile elde edilebilir. Ancak, asal integrallerin hesabı için genel bir kural yoktur. Normal sistem, aşağıda göstereceğimiz şekilde *simetrik şekil* veya *yardımcı sistem* denen bir şekle dönüştürülerek, asal integrallerin bulunması imkânı araştırılabilir.

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \ldots, y_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

normal sisteminden

$$dx = \frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n}$$

veya daha genel olarak

$$\frac{dx}{X(x, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dy_1}{Y_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n(x, y_1, \ldots, y_n)} \tag{1}$$

yazılabilir ki bu şekle, normal sistemin *simetrik şekli* veya *yardımcı sistem* denir. Burada bağımsız olarak n tane denklem mevcuttur. Değişkenlerden herhangibiri bağımsız değişken olarak düşünülebilir. Böyle bir sistemi çözmek için de genel bir kural yoktur. Aşağıda vereceğimiz kural, kesin sonucu daima vermez.

Evvelâ (1) den elde edilecek

$$Y_1 \, dx = X \, dy_1 \, , \ldots\ldots , \; Y_n \; dy_{n-1} = Y_{n-1} \, dy_n$$

denklemlerinden hepsi veya birkaç tanesinin çözülebilmesi yolu ile sonuca gidilebilir. Eğer bu denklemlerin hiçbiri çözülemiyorsa, aşağıdaki yola baş vurulur.

$x \, , y_1 \, , y_2 \, , \ldots , y_n$ nin

$$\mu_0 \quad , \quad \mu_1 \, , \ldots\ldots , \mu_n$$

gibi öyle $n + 1$ fonksiyonu aranır ki

$$\mu_0 X + \mu_1 Y_1 + \ldots + \mu_n Y_n = 0$$

ve

$$\mu_0 \, dx + \mu_1 \, dy_1 + \ldots + \mu_n \, dy_n$$

bağıntısı $F(x \, , y_1 \, , y_2 \, , \ldots , y_n)$ şeklinde bir fonksiyonun toplam diferansieli olsun.

Bu fonksiyonlar bulunabilirse (1) den

$$\frac{\mu_0 \, dx + \mu_1 \, dy_1 + \ldots + \mu_n \, dy_n}{\mu_0 X + \mu_1 Y_1 + \ldots + \mu_n Y_n} = \frac{dx}{X}$$

yazılabilir.

$$\mu_0 X + \mu_1 Y_1 + \ldots + \mu_n Y_n = 0$$

olduğundan

$$\mu_0 \, dx + \mu_1 \, dy_1 + \ldots\ldots + \mu_n \, dy_n = dF = 0$$

olması gerektiği düşünülerek

$$F(x \, , y_1 \, , \ldots , y_n) = c$$

elde edilir ki bu da verilen normal sistemin bir asal integralidir.

Şimdi söylediklerimizi, aşağıdaki örneklerle açıklamaya çalışalım.

ÖRNEK 1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z}{(z-y)^2} \quad ; \quad \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y}{(z-y)^2}$ sisteminin asal integrallerini bulunuz.

Sistem simetrik şekilde yazılırsa

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$$

elde edilir. Burada

$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$$

den

$$y\,dy - z\,dz = 0$$

olup

$$y^2 - z^2 = c_1$$

elde edilir. Aynı şekilde sistemden

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy - dz}{z-y} = -\frac{d(z-y)}{z-y}$$

olarak

$$dx = -(z-y)\,d(z-y)$$

ve

$$x + \frac{1}{2}(z-y)^2 = c_2$$

bulunur.

ÖRNEK 2. $\dfrac{dx}{x+1} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{-(x+y+z)}$ sisteminin asal integrallerini bulunuz.

$$\frac{dx}{x+1} = \frac{dy}{y}$$

den

$$y = c_1(x+1)$$

ve μ_0, μ_1, μ_2 olarak 1, 1, 1 seçilirse

$$\frac{dx + dy + dz}{(x+1) + y - (x+y+z)} = \frac{dz}{-(x+y+z)}$$

$$\frac{d(x+y+z)}{1-z} = \frac{dz}{-(x+y+z)}$$

$$(x+y+z)\,d(x+y+z) = (z-1)\,dz$$

$$\frac{1}{2}(x+y+z)^2 = \frac{1}{2}(z-1)^2 + K$$

$$(x+y+z)^2 - (z-1)^2 = c_2$$

bulunur.

ÖRNEK 3. $\dfrac{dx}{y-z} = \dfrac{dy}{z-x} = \dfrac{dz}{x-y}$ sisteminin asal integrallerini bulunuz.

Denklem sisteminden

$$(y-z) + (z-x) + (x-y) = 0$$

ve

$$x(y-z) + y(z-x) + z(x-y) = 0$$

olduğu kolayca görülebilir. Burada, μ_0, μ_1, μ_2 olarak, birinci halde, 1, 1, 1 ve ikinci halde, x, y, z alınmıştır. Bunlara göre

$$dx + dy + dz = 0$$

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

bağıntıları elde edilir. Bunların her ikisi de birer tam diferansiel olup, integralleri alınırsa

$$x + y + z = c_1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_2$$

elde edilir. Bunlar verilen sistemin iki asal integralidir. Asal integral sayısı, bilinmiyen fonksiyon sayısına eşit olup, bu bağıntılar sistemin genel çözümünü verirler.

21.7 - 3. Normal sistemin çözümü.

Bir diferansiel denklem sistemini çözmek demek, bu sistemin genel çözümünü bulmak demektir.

Daha evvel gördük ki, her diferansiel denklem sistemi, birinci mertebe diferansiel denklemlerden oluşan bir sisteme dönüştürülebilmektedir. Böyle bir sistem

$$
(1) \qquad \begin{array}{l} F_1(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y'_n) = 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ F_n(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y'_n) = 0 \end{array}
$$

olsun. Bu sistemi normal sistem haline getirebilmek için bu denklemlerden $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ çözmek gerekir. (1) denklemleri $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ ye göre çözülebiliyorsa, verilen sistemin denklem sayısına eşit sayıda denklemi içeren, bir normal sistem elde edilir. Elde edilen normal sistemin her çözümü, (1) sisteminin de çözümüdür. O halde normal sistemin genel çözümü, (1) sisteminin de genel çözümü ve dolayısile ilk verilen sistemin de genel çözümü olacaktır. Bu genel çözümde, (1) sisteminin denklem sayısı kadar yani n tane keyfi sabit bulunacaktır.

Bunlara göre, bir diferansiel denklem sisteminin çözümü bir normal sistemin çözümüne dönüştürülmüş olmaktadır. O halde, diferansiel denklem sistemlerinin çözümü için, normal sistemin çözüm yollarını araştırmak gerekecektir. Normal sistemlerin çözümü, *türetme ve yok etme kuralı* adı verilen bir kuralla bulunur. *Bu kuralla, normal sistemin denklemlerini türetmek ve biri hariç diğer bütün fonksiyonları yok etmek suretile, bilinmiyen bir tek fonksiyonun bir veya birkaç diferansiel denklemine varılır ve bu denklem yardımiyle sistemin çözümü elde edilir.* Bunu göstermek üzere,

$$
\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\[2ex] \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{array}
$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

normal sisteminin verilmiş olduğunu kabul edelim.

Yukarıda açıklandığı gibi bir tek diferansiel denkleme varabilmek üzere örneğin, sistemin birinci denklemini türetelim. Bu takdirde,

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}$$

ve sistemin denklemleri gözönüne alınırsa

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_1\frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \ldots + f_n\frac{\partial f_1}{\partial y_n}$$

elde edilir ki, bu da

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = g_2(x, y_1, \ldots, y_n)$$

şeklindedir. Tekrar türev alırsak,

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = \frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial g_2}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}$$

veya

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = \frac{\partial g_2}{\partial x} + f_1\frac{\partial g_2}{\partial y_1} + \ldots + f_n\frac{\partial g_2}{\partial y_n}$$

elde edilir ki, bu da

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = g_3(x, y_1, \ldots, y_n)$$

şeklindedir. Böylece devam edilirse

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n)$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = g_2(x, y_1, \ldots, y_n)$$

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = g_3(x, y_1, \ldots, y_n)$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = g_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

denklemleri elde edilir. Bunlardan ilk $n-1$ denklemi $y_2, y_3, \ldots, y_n$ e göre çözersek

$$(2) \qquad \begin{aligned} y_2 &= \phi_2\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right) \\ y_3 &= \phi_3\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right) \\ &\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ &\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ y_n &= \phi_n\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Bunları sonuncu denklemde yerlerine koyarsak,

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right)$$

elde edilir. Bu denklem n. mertebeden bir diferansiel denklemdir. Bu denklem çözülebilirse genel çözümü

$$y_1 = \varphi_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

şeklindedir. Bu değer (2) ifadelerinde yerlerine konursa

$$y_2 = \varphi_2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

$$y_3 = \varphi_3(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$y_n = \varphi_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

bulunur. Bu şekilde elde edilen n fonksiyon, verilen sistemin genel çözümünü oluştururlar.

ÖRNEK 1.
$$\frac{dy}{dx} = x - 2y - z$$
$$\frac{dz}{dx} = -4y + z + e^{-x}$$

sistemini çözünüz.

Bir normal sistem olup, birinci denklem x e göre türetilirse

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - 2\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx}$$

ve $\frac{dz}{dx}$ yerine, ikinci denklemdeki ifadesi konursa

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - 2\frac{dy}{dx} + 4y - z - e^{-x}$$

bulunur. Birinci denklemden z i çözüp burada yerine koyarsak

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = -x + 1 - e^{-x}$$

elde edilir. Bu ise ikinci mertebeden sabit katsayılı bir lineer diferansiel denklem olup genel çözümü,

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{6}x - \frac{5}{36} + \frac{1}{6}e^{-x}$$

dir. y nin bu ifadesini birinci denklemde yerine koyarsak,

$$z = c_1 e^{-3x} - 4c_2 e^{2x} + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{6}e^{-x}$$

bulunur. y ve z nin bu ifadeleri verilen sistemin genel çözümüdür.

ÖRNEK 2. $y = \frac{dz}{dx}$, $z = \frac{dy}{dx}$ diferansiel denklem sistemini çözünüz.

Birinci yol : İkinci denklemi z e göre türetelim.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Elde edilen bu ifadeyi birinci denklemde yerine koyarsak

$$y = \frac{d^2y}{dx^2}$$

veya

$$y'' - y = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin genel çözümü

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

olup ikinci denklemde yerine konursa

$$z = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$$

bulunur.

İkinci yol : İki denklemi taraf tarafa toplarsak

$$y + z = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} = \frac{d(y+z)}{dx}$$

veya

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\log \frac{y+z}{C} = x \quad , \quad y + z = C e^x$$

bulunur. İki denklem taraf tarafa çıkarılırsa

$$y - z = \frac{dz}{dx} - \frac{dy}{dx} = -\frac{d(y-z)}{dx}$$

$$\frac{d(y-z)}{y-z} = -dx \quad , \quad \log \frac{y-z}{K} = -x$$

$$y - z = K e^{-x}$$

bulunur. $y + z$ ve $y - z$ ifadelerinden ise

$$y = \frac{C}{2} e^{x} + \frac{K}{2} e^{-x}$$

$$z = \frac{C}{2} e^{x} - \frac{K}{2} e^{-x}$$

veya

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

$$z = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x}$$

elde edilir.

Türetme ve yoketme kuralı, normal sistemlerin çözümüne ve dolayısile normal hale dönüştürülebilen bütün diferansiel denklem sistemlerine uygulanabilmektedir. Ancak, bu uygulama sırasında, verilen sistemin, daima normal şekle dönüştürülmesi şart değildir.

ÖRNEK 3. $2y' = z'^2$; $y = z + xz'$ sistemini çözünüz.

İkinci denklemi türetirsek,

$$y' = 2z' + xz''$$

ve bunu birinci denklemde yerine koyarsak

$$4z' + 2xz'' = z'^2$$

$$2xz'' = z'(z' - 4)$$

elde edilir. Bu denklem, yalnız z bilinmiyen fonksiyonunu içermektedir. Burada

$$z' = p$$

dönüştürmesi yapılırsa

$$2xp' + 4p = p^2$$

Bernoulli denklemine varılır. Bu denklemi çözüp $z' = p$ de yerine koyarsak

$$z = \frac{2}{\sqrt{c_1}} \operatorname{arctg} 2\sqrt{c_1}\, x + c_2$$

bulunur. Bu da sistemin ikinci denkleminde yerine konursa

$$y = \frac{2}{\sqrt{c_1}} \operatorname{arctg} 2\sqrt{c_1}\, x + c_2 + \frac{4x}{1 + 4c_1x^2}$$

elde edilir.

21.7 - 4. Sabit katsayılı lineer diferansiel denklem sistemlerinin çözümü.

Lineer sistem diye denklemleri, bilinmiyen fonksiyonlara ve onların türevlerine göre lineer olan bir sisteme denir. Genel olarak, sabit katsayılı lineer diferansiel denklem sistemleri, içerdiği denklemlerin herbirinde, bilinmiyen fonksiyonların ve türevlerinin katsayıları sabit olan lineer denklem sistemleridir. Böyle bir sistem genellikle,

$$\begin{aligned}
&P_{11}(D)\, y_1 + P_{12}(D)\, y_2 + \ldots\ldots + P_{1n}(D)\, y_n = f_1(x) \\
&P_{21}(D)\, y_1 + P_{22}(D)\, y_2 + \ldots\ldots + P_{2n}(D)\, y_n = f_2(x) \\
(1)\quad &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&P_{n1}(D)\, y_1 + P_{n2}(D)\, y_2 + \ldots\ldots + P_{nn}(D)\, y_n = f_n(x)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Denklemlerdeki $P_{ij}(D)$ ler $D = \frac{d}{dx}$ türetme operatörünün tam fonksiyonlarıdır. Sistemdeki denklemler lineer denklemler olup birinci mertebeden olmaları şart değildir. Örneğin

$$\begin{aligned}
2(D-2)\, y_1 + (D-1)\, y_2 &= e^x \\
(D+3)\, y_1 + y_2 &= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(D^2-2)\, y_1 - 3y_2 &= e^{2x} \\
y_1 + (D^2+2)\, y_2 &= 0
\end{aligned}$$

sistemleri sabit katsayılı lineer denklem sistemleridir.

Bu sistemler için, ispatını yapmadan, aşağıdaki teoremi vereceğiz.

TEOREM. (1) sisteminin genel çözümünde,

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) & \dots & P_{1n}(D) \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) & \dots & P_{2n}(D) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1}(D) & P_{n2}(D) & \dots & P_{nn}(D) \end{vmatrix}$$

determinantının açılımında bulunan D *lerin en yüksek derecesine eşit sayıda, keyfi sabit bulunur.*

Burada $\Delta \neq 0$ kabul edilmektedir. $\Delta = 0$ olması halinde, sistemin denklemleri birbirine bağlıdır. Biz bu hali incelemiyeceğiz. Örneğin yukarıdaki birinci örnek için,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(D-1) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix} = -(D^2+1)$$

olup, D ye nazaran ikinci derecedendir. O halde bu sistemin genel çözümünde iki keyfi sabit bulunacaktır.

Sabit katsayılı lineer sistemlerin çözümü de, *türetme ve yoketme* kuralı ile elde edilir. Ancak bu halde, operatörlerin türetilmesinden de faydalanılır. Bu hususu bir örnekle gösterelim.

ÖRNEK 1. $$2(D-2)y_1 + (D-1)y_2 = e^x$$

$$(D+3)y_1 + y_2 = 0$$

sistemini çözünüz.

Birinci yol : Bu sistem

$$2\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} - 4y_1 - y_2 = e^x$$

$$\frac{dy_1}{dx} + 3y_1 + y_2 = 0$$

şeklinde olup ikinci denklemi türetirsek,

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + 3\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} = 0$$

elde edilir. Bu denklemi -1 ile çarptıktan sonra, üç denklemi taraf tarafa toplarsak

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + y_1 = -e^x$$

denklemine varılır. Bu denklem ise, bir tek y_1 fonksiyonunu bilinmiyen olarak içeren sabit katsayılı lineer diferansiel denklem olup genel çözümü,

$$y_1 = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{e^x}{2}$$

dir. Bu bağıntı, sistemin ikinci denkleminde yerine konursa,

$$y_2 = -\frac{dy_1}{dx} - 3y_1 = (c_1 - 3c_2)\sin x - (3c_1 + c_2)\cos x + 2e^x$$

elde edilir. Bu çözümler iki keyfi sabit içermektedir. Bu ise, Δ nın ikinci dereceden olması nedeni ile, genel çözümdeki sabit sayısına eşittir. O halde bu bağıntılar sistemin genel çözümüdür.

İkinci yol: Şimdi de operatörlerin türetilmesinden faydalanalım. Çözüme varmak için iki bilinmiyenli cebirsel denklemlerin çözümündeki yolu izleyeceğiz. Ancak, cebirde harfler üzerine uygulanan işlemi, burada D operatörüne uygulayacağız. Yukarıda ele aldığımız sistemin D operatörü cinsinden ifadesi

$$2(D-2)\,y_1 + (D-1)\,y_2 = e^x$$

$$(D+3)\,y_1 + y_2 = 0$$

dır. Amaç, bu denklemlerden y_1 ve y_2 *yi* çözmektir. Bunun için de y_2 lerin katsayılarını eşitlemek üzere, ikinci denklemin her iki tarafını $D-1$ ile çarpalım. Bu takdirde

$$(D-1)(D+3)\,y_1 + (D-1)\,y_2 = 0$$

elde edilir. Sistemin birinci denklemi ile bu denklem taraf tarafa çıkarılırsa,

$$[(D-1)(D+3) - 2(D-2)]\,y_1 = -\,e^x$$

veya

$$(D^2+1)\,y_1 = -\,e^x$$

elde edilir. Bu ise evvelki çözüm sırasında elde ettiğimiz,

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + y_1 = -\,e^x$$

denklemidir. Bundan sonra, birinci yol sırasında izlenen yol uygulanır. Bu yol, birinci yoldan farklı olmamakla beraber daha sistematik bir yoldur.

Üçüncü yol : Bu yolda, denklem sistemlerinin determinantlar yardımiyle çözümüne ait, Cramer teoreminden faydalanacağız. Verilen sistem

$$2(D-2)\,y_1 + (D-1)\,y_2 = e^x$$

$$(D+3)\,y_1 + y_2 = 0$$

olsun. y_1 ve y_2 yi bilinmiyen olarak içeren bu sistemin katsayılar determinantı

$$\Delta = -\,(D^2+1)$$

olup sıfırdan farklıdır. Buna göre

$$\begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix} y_1 = \begin{vmatrix} e^x & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ve

$$\begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix} y_2 = \begin{vmatrix} 2(D-2) & e^x \\ D+3 & 0 \end{vmatrix}$$

olup bunlardan birincisi

$$(D^2 + 1)\, y_1 = -\, e^x$$

denklemini verir ki genel çözümü

$$y_1 = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{e^x}{2}$$

dir. İkinci bağıntı ise

$$-\,(D^2 + 1)\, y_2 = -\,(D + 3)\, e^x = -\,4\, e^x$$

$$(D^2 + 1)\, y_2 = 4\, e^x$$

denklemini verir. Bu denklem ise yalnız y_2 yi bilinmiyen olarak içeren sabit katsayılı lineer bir diferansiel denklemdir. Bu denklemin genel çözümü

$$y_2 = c_3 \cos x + c_4 \sin x + 2\, e^x$$

dir. Ancak, Δ determinantının D ye göre ikinci derece oluşu, sistemin genel çözümünün iki keyfi sabiti içermesi gerektiğini gösterir. O halde c_3, c_4 sabitleri c_1 ve c_2 ye bağlıdır. Bu bağıntıları elde etmek üzere y_1 ve y_2 nin bulunan ifadelerini sistemin ikinci denkleminde yerlerine koyalım. Bu takdirde

$$(3c_1 + c_2 + c_3) \cos x + (3c_2 - c_1 + c_4) \sin x \equiv 0$$

elde edilir. Bu eşitlik, x ne olursa olsun, sağlanacağına göre,

$$3c_1 + c_2 + c_3 = 0 \quad ; \quad 3c_2 - c_1 + c_4 = 0$$

veya

$$c_3 = -\,(3c_1 + c_2) \quad ; \quad c_4 = c_1 - 3c_2$$

olmalıdır. y_2 nin ifadesinde c_3 ve c_4 yerine, c_1 ve c_2 cinsinden ifadeleri konursa,

$$y_1 = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{e^x}{2}$$

$$y_2 = -\,(3c_1 + c_2) \cos x + (c_1 - 3c_2) \sin x + 2\, e^x$$

genel çözümü elde edilir.

ÖRNEK 2.
$$(D-1)\,y_1 + Dy_2 = 2x+1$$
$$(2D+1)\,y_1 + 2Dy_2 = x$$

diferansiel denklem sistemini çözünüz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} D-1 & D \\ 2D+1 & 2D \end{vmatrix} = 2D^2 - 2D - 2D^2 - D = -3D$$

olup D ye göre birinci derecedendir. O halde sistemin genel çözümü bir tane keyfi sabit içerecektir.

Verilen denklemlerden y_2 yi yoketmek üzere, birinci denklemi 2 ile çarpar ve denklemleri taraf tarafa çıkarırsak,

$$3y_1 = -3x - 2$$

elde ederiz. Bu ifadede hiçbir türev mevcut değildir. y_1 in bu değerini, sistemin birinci denkleminde yerine koyarsak,

$$Dy_2 = 2x + 1 - (D-1)\,y_1 = x + \frac{4}{3}$$

ve buradan da

$$y_2 = \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{4}{3}\,x + c$$

bulunur. Bunlara göre verilen sistemin genel çözümü

$$y_1 = -x - \frac{2}{3} \quad ; \quad y_2 = \frac{x^2}{2} + \frac{4x}{3} + c$$

dir.

ÖRNEK 3.
$$(D^2-2)\,y_1 - 3y_2 = e^{2x}$$
$$y_1 + (D^2+2)\,y_2 = 0$$

diferansiel denklem sistemini çözünüz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} D^2-2 & -3 \\ 1 & D^2+2 \end{vmatrix} = D^4 - 1$$

olup sistemin genel çözümü, dört keyfi sabit içerecektir. Çözümü determinantlar yolu ile bulmak istersek,

$$\begin{vmatrix} D^2-2 & -3 \\ 1 & D^2+2 \end{vmatrix} y_1 = \begin{vmatrix} e^{2x} & -3 \\ 0 & D^2+2 \end{vmatrix}$$

$$(D^4-1)\, y_1 = (D^2+2)\, e^{2x}$$

$$(D^4-1)\, y_1 = 6\, e^{2x}$$

elde edilir ki, bu da yalnız bilinmiyen y_1 fonksiyonunu içeren sabit katsayılı lineer bir diferansiel denklemdir. Bu denklemin genel çözümü,

$$y_1 = c_1\, e^x + c_2\, e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{2}{5}\, e^{2x}$$

dir. y_1 in bu ifadesi sistemin birinci denkleminde yerine konursa

$$y_2 = -\frac{1}{3}(c_1\, e^x + c_2\, e^{-x}) - (c_3 \cos x + c_4 \sin x) - \frac{e^{2x}}{15}$$

bulunur. y_1 ve y_2 nin bu ifadeleri sistemin genel çözümünü verirler.

21.7 - 5. Lineer ve sabit katsayılı bir normal diferansiel denklem sisteminin matrisler yardımiyle çözümü.

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2(t)$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t)$$

şeklindeki bir sistem, sabit katsayılı lineer ve homojen olmayan normal bir sistemdir. Bu sistemde

$$f_1(t) = f_2(t) = \dots\dots = f_n(t) = 0$$

ise sistem, *homojen sistem* adını alır.

Homojen olmayan lineer sistemin genel çözümünü bulmak için, evvelâ homojen sistemin genel çözümü bulunur. Sonra da homojen olmayan sistemin bir özel çözümü aranır ve bunlar toplanır.

Bu sistem, matrisler yardımiyle

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

veya daha kısa olarak

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + f_i(t)$$

şekillerinde yazılabilir. Eğer,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} , \qquad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

ise, sistem

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t)$$

olur. Sistem homojen ise, yukarıdaki ifadeler

$$\frac{dx_i}{dt} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$$

veya

$$\frac{dx}{dt} - Ax = 0$$

şekillerini alır.

Böyle bir homojen sistemin çözümleri hakkında, şunları söyliyebiliriz.

$$x^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^{(1)}(t) \end{bmatrix}, \ldots\ldots, \quad x^{(m)}(t) = \begin{bmatrix} x_1^{(m)}(t) \\ x_2^{(m)}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^{(m)}(t) \end{bmatrix}$$

ler homojen sistemin m çözümü ise, bunların lineer kombinasyonu,

$$\sum_{k=1}^{m} c_k x^{(k)}(t)$$

şeklinde yazılabilir.

TEOREM 1. Bir homojen sistemin çözümlerinin, lineer bir kombinasyonu da, bu sistemin bir çözümüdür.

İspat. $x^{(1)}(t), \ldots, x^{(m)}(t)$ ler

$$\frac{dx}{dt} - Ax = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{dx_i}{dt} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$$

homojen sisteminin m çözümü olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k=1}^{m} c_k\, x^{(k)}(t)$$

nin de çözüm olduğunu gösterelim. Bu ifade çözüm ise, sistemi sağlamalıdır. Bunu sistemde yerine koyarsak,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{k=1}^{m} c_k\, x^{(k)}(t) - A\sum_{k=1}^{m} c_k\, x^{(k)}(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k\left[\frac{\mathrm{d}\, x^{(k)}(t)}{\mathrm{d}t} - A\, x^{(k)}(t)\right]$$

elde edilir. Her k için $x^{(k)}(t)$ ler

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - Ax = 0$$

sistemini sağlıyacağından ikinci taraftaki köşeli parantezin içi

$$\frac{\mathrm{d}\, x^{(k)}(t)}{\mathrm{d}t} - A\, x^{(k)}(t) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

olacaktır. Buna göre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{k=1}^{m} c_k\, x^{(k)}(t) - A\sum_{k=1}^{m} c_k\, x^{(k)}(t) = 0$$

elde edilir ki, bu da $\sum_{k=1}^{m} c_k\, x^{(k)}(t)$ bağıntısının, homojen sistemi sağladığını ve dolayısile sistemin çözümü olduğunu gösterir.

TEOREM 2. n bilinmiyenli bir sistemin birbirine bağlı olmıyan n çözümünün lineer kombinasyonu, bu sistemin genel çözümüdür.

Homojen olmayan sistemin çözümü :

- *TEOREM 3.* $\varphi(t)$ *homojen olmayan sistemin bir özel çözümü ve* $v(t)$ de *homojen sistemin bir çözümü* ise,

$$x(t) = \varphi(t) + v(t)$$

de homojen olmayan sistemin bir çözümüdür.

İspat. Sistem

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t)$$

olsun.

$$x(t) = \varphi(t) + v(t)$$

nin, bu sistemi sağlama şartını yazalım.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{dv}{dt}$$

olup

$$\frac{d\varphi}{dt} + \frac{dv}{dt} = A(\varphi + v) + f(t)$$

veya

$$\left[\frac{d\varphi}{dt} - A\varphi\right] + \left[\frac{dv}{dt} - Av\right] = f(t)$$

dir. φ homojen olmayan sistemin bir özel çözümü olup

$$\frac{d\varphi}{dt} - A\varphi \equiv f(t)$$

ve v de homojen sistemin bir çözümü olup

$$\frac{dv}{dt} - Av \equiv 0$$

olarak yukarıdaki sağlama şartı

$$f(t) + 0 \equiv f(t)$$

şeklini alır ki bu da,

$$x(t) = \varphi(t) + v(t)$$

nin homojen olmayan sistemin bir çözümü olduğunu gösterir.

TEOREM 2 ve TEOREM 3 e göre homojen olmayan bir sistemin genel çözümü

$$\boxed{x(t) = \varphi(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k\, x^{(k)}(t)}$$

dir.

ÖZET : Homojen olmayan bir lineer sistemin genel çözümü, bu sistemin bir özel çözümü ile homojen sistemin genel çözümünün toplamına eşittir.

Diğer bir ifade ile, homojen olmayan bir lineer sistemin genel çözümünü bulmak için, evvelâ homojen sistemin genel çözümünü ve sonra da homojen olmayan sistemin bir özel çözümünü bulmalı ve bu çözümleri toplamalıdır.

Özel çözümleri bulmak için sabitin değişimi kuralından faydalanılır.

$$\frac{dx}{dt} - Ax = 0$$

şeklindeki homojen sistemin genel çözümü

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, x^{(k)}(t) \tag{1}$$

olsun. *Bu çözümün*

$$\frac{dx}{dt} - Ax = f(t) \tag{2}$$

şeklindeki homojen olmayan sistemi sağlıyabilmesi için, c_k ların nasıl $c_k(t)$ fonksiyonları olması gerektiğini araştıralım. Bunun için de (1) in (2) sistemini sağlama şartını yazalım.

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{dc_k}{dt} x^{(k)}(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{dx^{(k)}}{dt}$$

olup

$$\frac{dx}{dt} - Ax = f(t)$$

sisteminde yerlerine konursa

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{dc_k}{dt} x^{(k)}(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{dx^{(k)}}{dt} - \sum_{k=1}^{n} A\, c_k\, x^{(k)}(t) = f(t)$$

veya

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{dc_k}{dt} x^{(k)}(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k \left[\frac{dx^{(k)}}{dt} - A\, x^{(k)}(t)\right] = f(t)$$

elde edilir. $x^{(k)}(t)$ homojen sistemin bir çözümü olup

$$\frac{dx^{(k)}}{dt} - A\, x^{(k)}(t) \equiv 0$$

olacağından

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{dc_k}{dt} x^{(k)}(t) = f(t)$$

elde edilir. Buna göre c_k ların

$$\sum_{k=1}^{n} c_k'(t)\, x_i^{(k)}(t) = f_i(t) \quad ; \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

şartını gerçekleştirmeleri gerektiği sonucuna varılır. Bu şarttan,

$$c_k'(t) = \psi_k(t)$$

$$c_k(t) = \int \psi_k(t)\, dt = \phi_k(t)$$

bulunur. O halde homojen olmayan sistemin özel çözümü,

$$x_p = \sum_{k=1}^{n} \phi_k(t)\, x^{(k)}(t)$$

dir.

Bu sonucu, matrisler yardımiyle daha basit olarak elde edebiliriz

$$\frac{dx}{dt} - Ax = f(t)$$

sistemi verilmiş olsun. Homojen sistemin, yani

$$\frac{dx}{dt} - Ax = 0$$

sisteminin genel çözümü

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} c_k\, x_i^{(k)}$$

olsun. Bu çözüm,

$$\begin{aligned}
x_1 &= c_1 x_1^{(1)} + c_2 x_1^{(2)} + \ldots + c_n x_1^{(n)} \\
x_2 &= c_1 x_2^{(1)} + c_2 x_2^{(2)} + \ldots + c_n x_2^{(n)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= c_1 x_n^{(1)} + c_2 x_n^{(2)} + \ldots + c_n x_n^{(n)}
\end{aligned}$$

veya matrislerle,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \ldots\ldots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \ldots\ldots & x_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \ldots\ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots\ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots\ldots & \cdot \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \ldots\ldots & x_n^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix}$$

veyahut da daha kısa olarak,

$$x = X\,C$$

şeklinde yazılabilir. Burada x, birinci taraftaki matrisi; X, ikinci taraftaki kare matrisi ve C de ikinci taraftaki sütun matrisi göstermektedir.

Şimdi şu soruyu ortaya atalım : $x = X\,C$ *ifadesindeki* C *nasıl bir fonksiyon olmalıdır ki* $x = X\,C$ *çözümü*

$$\frac{dx}{dt} - Ax = f(t)$$

sisteminin çözümü olsun. Bu soruya cevap bulmak üzere, sağlama şartını yazalım.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dX}{dt}\,C + X\,\frac{dC}{dt}$$

olup sağlama şartı

$$\frac{dX}{dt}\,C + X\,\frac{dC}{dt} - A\,X\,C = f(t)$$

$$\left(\frac{dX}{dt} - A\,X\right)C + X\,\frac{dC}{dt} = f(t)$$

ve X homojen sistemin bir çözümü olduğundan

$$\frac{dX}{dt} - A\,X = 0$$

olup

$$X\,\frac{dC}{dt} = f(t)$$

dır. Buradan C yi elde etmek üzere, $\frac{dC}{dt}$ yi çözelim. Bunun için de bağıntının her iki tarafını X^{-1} ters matrisi ile soldan çarpalım. Bu takdirde

$$X^{-1}\,X\,\frac{dC}{dt} = X^{-1}\,f(t)$$

olup

$$\frac{dC}{dt} = X^{-1}\,f(t)$$

elde edilir. Buradan da

$$\boxed{C = \int X^{-1} f(t)\, dt}$$

bulunur. O halde homojen olmayan sistemin özel çözümü

$$\boxed{x_p = X\,C = X \int X^{-1} f(t)\, dt}$$

ve genel çözümü

$$\boxed{x = X\,C + x_p}$$

dir.

Homojen sistemin çözümü :

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n$$

homojen sistemi verilmiş olsun. Denklemdeki a_{ij} katsayıları sabitlerdir. t *bağımsız değişken ve* $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... , $x_n(t)$ ler bilinmiyen fonksiyonlardır. Bu şartlarda, yukarıdaki sistem, sabit katsayılı lineer ve homojen bir normal sistemdir. Bu sistem, 21.7 - 4 de görüldüğü gibi türetme ve yoketme kuralı uygulanarak, *n*. mertebeden sabit katsayılı lineer bir denkleme varılmak suretile çözülebilir. Biz burada, sistemin çözümünü diğer bir yoldan ele alacağız. Bu yol bizi, *n*. mertebeden bir denkleme varmadan çözüme götürecektir. Bu kural, çözümlerin karakterlerinin analizine dayanır.

Sistemin,

$$x_1 = \alpha_1\, e^{kt} \quad , \quad x_2 = \alpha_2\, e^{kt} \quad , \ldots\ldots , \quad x_n = \alpha_n\, e^{kt}$$

şeklindeki özel çözümlerini arayalım. Bunun için de,

$$\alpha_1 e^{kt} \quad , \quad \alpha_2 e^{kt} \quad , \ldots . , \quad \alpha_n e^{kt}$$

fonksiyonlarının sistemin denklemlerini sağlama şartından faydalanarak, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, k$ sabitlerini belirtelim. Bu fonksiyonlar, sistemin denklemlerinde yerlerine konursa,

$$\begin{aligned} k\,\alpha_1 e^{kt} &= (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots . + a_{1n}\,\alpha_n)\, e^{kt} \\ k\,\alpha_2 e^{kt} &= (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots . + a_{2n}\,\alpha_n)\, e^{kt} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k\,\alpha_n e^{kt} &= (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots . + a_{nn}\,\alpha_n)\, e^{kt} \end{aligned}$$

bağıntıları elde edilir. Bunları e^{kt} ile kısaltalım ve bütün terimleri birinci tarafa taşıyarak $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ e göre düzenliyelim. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} (a_{11} - k)\,\alpha_1 + a_{12}\,\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\,\alpha_n &= 0 \\ a_{21}\,\alpha_1 + (a_{22} - k)\,\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\,\alpha_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\,\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - k)\,\alpha_n &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Şimdi de bu sistemden, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ leri çözelim. Bu denklem sistemi, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ e göre lineer ve homojen bir denklem sistemidir. Bu sistemin katsayılar determinantı

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots\ldots\ldots & . \\ . & . & \ldots\ldots\ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots\ldots & a_{nn} - k \end{vmatrix}$$

dır. Eğer k, bu determinantı sıfır kılmıyorsa sistemin ancak,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots\ldots = \alpha_n = 0$$

şeklindeki, aşikâr çözümleri vardır. Bu halde

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots\dots = x_n(t) = 0$$

ifadeleri aşikâr çözümleri verir.

Sistemin aşikâr olmayan çözümlerini elde edebilmek için, k yı, $\Delta(k) = 0$ olacak şekilde seçmek gerekir. Bu takdirde k,

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots\dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots\dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0$$

denkleminin kökleri olur. Bu denkleme, verilen diferansiel denklem sisteminin, *karakteristik denklemi* denir. Denklemin kökleri de, *karakteristik denklemin kökleri* adını alır.

Üç bilinmiyenli diferansiel denklem sistemine uygulama.

Şimdi bu kuralı 3 bilinmiyenli bir sisteme uygulayalım. Böyle bir sistem,

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + c_1z + p(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + c_2z + q(t)$$

$$\frac{dz}{dt} = a_3x + b_3y + c_3z + r(t)$$

şeklindedir. Homojen sistemin çözümünü bulalım. Homojen sistem,

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + c_1z$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + c_2z$$

$$\frac{dz}{dt} = a_3x + b_3y + c_3z$$

olup $x(t), y(t), z(t)$ şeklinde üç fonksiyon tanımlar. Sistemin,

$$x = \alpha_1 e^{kt} \quad , \quad y = \alpha_2 e^{kt} \quad , \quad z = \alpha_3 e^{kt}$$

şeklindeki, özel çözümlerini arayalım. Buradaki $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ler sabitlerdir. Bu çözümlerin sistemi sağlama şartları,

$$(a_1 - k)\,\alpha_1 + b_1\alpha_2 + c_1\alpha_3 = 0$$

$$a_2\alpha_1 + (b_2 - k)\,\alpha_2 + c_2\alpha_3 = 0$$

$$a_3\alpha_1 + b_3\alpha_2 + (c_3 - k)\,\alpha_3 = 0$$

dır. Bu ise $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ leri bilinmiyen kabul eden, homojen bir lineer denklem sistemidir. Bu sistemin

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

aşikâr çözüm takımı,

$$x = 0 \qquad y = 0 \quad , \quad z = 0$$

çözümlerini verir. Sistemin aşikâr olmayan çözüm takımının olabilmesi için, katsayılar determinantının sıfıra eşit olması gerekir. Bu ise,

$$\begin{vmatrix} a_1 - k & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - k & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - k \end{vmatrix} = 0$$

şeklinde k ya nazaran üçüncü dereceden bir cebirsel denklemdir. Bu denklem, verilen diferansiel denklem sisteminin *karakteristik denklemidir.* k_1, bu denklemin bir kökü ise, buna hepsi birden sıfır olmayan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sabitleri karşılık gelir ve $k = k_1$ için

$$x_1 = \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t} \quad , \quad y_1 = \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t} \quad , \quad z_1 = \alpha_3^{(1)} e^{k_1 t}$$

ler, diferansiel denklem sisteminin bir çözüm takımı olur. Karakteristik

denklemin k_1, k_2, k_3 gibi üç farklı kökü varsa, bunlar üç özel çözüm takımı verir.Bunların lineer kombinasyonları olan,

$$x = c_1 \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t} + c_2 \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t} + c_3 \alpha_1^{(3)} e^{k_3 t}$$

$$y = c_1 \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t} + c_2 \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t} + c_3 \alpha_2^{(3)} e^{k_3 t}$$

$$z = c_1 \alpha_3^{(1)} e^{k_1 t} + c_2 \alpha_3^{(2)} e^{k_2 t} + c_3 \alpha_3^{(3)} e^{k_3 t}$$

ifadeleri verilen sistemin genel çözümü olur.

Eğer karakteristik denklem, $k = a \pm b\,i$ şeklinde bir eşlenik kompleks kök çiftine malikse, yukarıdaki genel çözüm, üstel kompleks ifadeler şeklinde olur. Bu takdirde çözüm, sinüs ve kosinüslü olarak yazılabilir.

$k = k_1$, iki katlı bir kök ise, çözümler,

$$x = (\alpha_1 + At)\, e^{k_1 t} \quad , \quad y = (\alpha_2 + Bt)\, e^{k_1 t}$$

$$z = (\alpha_3 + Ct)\, e^{k_1 t}$$

şeklindedir. Buradaki $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, A, B, C$ ler belirtilmesi gereken sabitlerdir.

k, λ katlı bir kök ise, $e^{k_1 t}$ ye, $\lambda - 1$ inci dereceden bir tam çok terimli katsayı olarak verilir.

ÖRNEK 1. $\dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2 \quad ; \quad \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 - 2x_1$

sistemini çözünüz.

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt} \quad , \quad x_2 = \alpha_2 e^{kt}$$

ler sistemin çözümleri olsun. α_1, α_2 ve k yı belirtmek üzere sağlama şartını yazalım.

$$\frac{dx_1}{dt} = k\,\alpha_1 e^{kt} \quad , \quad \frac{dx_2}{dt} = k\,\alpha_2 e^{kt}$$

olup

$$k\,\alpha_1 e^{kt} = \alpha_1 e^{kt} - 2\alpha_2 e^{kt}$$

$$k\,\alpha_2 e^{kt} = \alpha_2 e^{kt} - 2\alpha_1 e^{kt}$$

veya

$$(1-k)\,\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0$$
$$-2\alpha_1 + (1-k)\,\alpha_2 = 0$$

dır. Sistemin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} 1-k & -2 \\ -2 & 1-k \end{vmatrix} = k^2 - 2k - 3 = 0$$

olup

$$k_1 = 3 \quad , \quad k_2 = -1$$

dir.

$k = k_1 = 3$ için,

$$\left.\begin{array}{r} -2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{array}\right. \rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2$$

olup $\alpha_1 = 1$ ise $\alpha_2 = -1$ olur. Buna göre çözümler,

$$x_1 = e^{3t} \quad , \quad x_2 = -e^{3t}$$

dir.

$k = k_2 = -1$ için

$$\left.\begin{array}{r} 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{array}\right. \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

olup, çözümler

$$x_1 = e^{-t} \quad , \quad x_2 = e^{-t}$$

dır. O halde genel çözüm,

$$x_1 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$$
$$x_2 = -c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$$

veya

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1\, e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\, e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir.

ÖRNEK 2.

$$\frac{dx}{dt} = -5x + 5y + 7z$$

$$\frac{dy}{dt} = -2x + 2y + 3z$$

$$\frac{dz}{dt} = -4x + 5y + 4z$$

sistemini çözünüz.

Bu sistem, matrisler yardımiyle

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 4 \end{bmatrix} X$$

şeklinde yazılabilir. Sistemin çözümleri

$$x = A\, e^{kt} \quad , \quad y = B\, e^{kt} \quad , \quad z = C\, e^{kt}$$

olsun. Bunlara göre sağlama şartı,

$$\frac{dx}{dt} = A\, k\, e^{kt} \quad , \quad \frac{dy}{dt} = B\, k\, e^{kt} \quad , \quad \frac{dz}{dt} = C\, k\, e^{kt}$$

olarak

$$A\, k\, e^{kt} = -5A\, e^{kt} + 5B\, e^{kt} + 7C\, e^{kt}$$

$$B\, k\, e^{kt} = -2A\, e^{kt} + 2B\, e^{kt} + 3C\, e^{kt}$$

$$C\, k\, e^{kt} = -4A\, e^{kt} + 5B\, e^{kt} + 4C\, e^{kt}$$

veya

$$\begin{aligned} (-5-k)A + 5B + 7C &= 0 \\ -2A + (2-k)B + 3C &= 0 \\ -4A + 5B + (4-k)C &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

dır. Karakteristik denklem,

$$\begin{vmatrix} -5-k & 5 & 7 \\ -2 & 2-k & 3 \\ -4 & 5 & 4-k \end{vmatrix} = 0$$

veya

$$k^3 - k^2 + k - 1 = (k-1)(k^2+1) = 0$$

olup bu denklemin kökleri, $k_1 = 1$, $k_2 = i$, $k_3 = -i$ dir.

$k_1 = 1$ için (1) sistemi,

$$-6A + 5B + 7C = 0$$
$$-2A + B + 3C = 0$$
$$-4A + 5B + 3C = 0$$

şeklini alır. Bunlardan $A = 2B$ bulunur. $B = 1$ seçilirse

$$A = 2 \quad , \quad B = 1 \quad , \quad C = 1$$

olur. O halde çözümler

$$x = 2\,e^t \quad , \quad y = e^t \quad , \quad z = e^t$$

veya

$$\begin{bmatrix} 2\,e^t \\ e^t \\ e^t \end{bmatrix}$$

dir.

$k_2 = i$ için (1) sistemi,

$$(-5-i)A + 5B + 7C = 0$$
$$-2A + (2-i)B + 3C = 0$$
$$-4A + 5B + (4-i)C = 0$$

şeklini alır. Bunlardan

$$(1 + 3i)A - (1 + 7i)B = 0$$

bulunur. $A = 1 + 7i$ seçilirse

$$A = 1 + 7i \quad , \quad B = 1 + 3i \quad , \quad C = -1 + 3i$$

olarak, çözümler

$$x = (1 + 7i)e^{it} \quad , \quad y = (1 + 3i)e^{it} \quad , \quad z = (-1 + 3i)e^{it}$$

veya

$$\begin{bmatrix} (1 + 7i)\, e^{it} \\ (1 + 3i)\, e^{it} \\ (-1 + 3i)\, e^{it} \end{bmatrix}$$

dir. $e^{it} = \cos t + i \sin t$ olduğu gözönüne alınırsa, yukarıdaki matris,

$$\begin{bmatrix} \cos t - 7 \sin t \\ \cos t - 3 \sin t \\ -\cos t - 3 \sin t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 7 \cos t + \sin t \\ 3 \cos t + \sin t \\ 3 \cos t - \sin t \end{bmatrix}$$

şeklini alır.

$k_3 = -i$ için (1) sistemi

$$(-5 + i)A + 5B + 7C = 0$$

$$-2A + (2 + i)B + 3C = 0$$

$$-4A + 5B + (4 + i)C = 0$$

şeklini alır. Bunlardan

$$(1 - 3i)A - (1 - 7i)B = 0$$

bulunur. $A = 1 - 7i$ seçilirse

$$A = 1 - 7i \quad , \quad B = 1 - 3i \quad , \quad C = -1 - 3i$$

olarak, çözümler

$$x = (1 - 7\,i)\mathrm{e}^{-it} \quad , \quad y = (1 - 3\,i)\mathrm{e}^{-it} \quad , \quad z = (-1 - 3\,i)\mathrm{e}^{-it}$$

veya

$$\begin{bmatrix} (1 - 7\,i)\,\mathrm{e}^{-it} \\ (1 - 3\,i)\,\mathrm{e}^{-it} \\ (-1 - 3\,i)\,\mathrm{e}^{-it} \end{bmatrix}$$

dir. Bu çözümlerde, $\mathrm{e}^{-it} = \cos t - i \sin t$ olduğu gözönüne alınırsa, yukarıdaki matris

$$\begin{bmatrix} \cos t - 7 \sin t \\ \cos t - 3 \sin t \\ -\cos t - 3 \sin t \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 7 \cos t + \sin t \\ 3 \cos t + \sin t \\ 3 \cos t - \sin t \end{bmatrix}$$

şekline girer. Bu ise $k_2 = i$ ye karşılık olan çözümün eşleniğidir.

Bunlara göre sistemin çözümü

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \cos t - 7 \sin t \\ \cos t - 3 \sin t \\ -\cos t - 3 \sin t \end{bmatrix} + c_2\, i \begin{bmatrix} 7 \cos t + \sin t \\ 3 \cos t + \sin t \\ 3 \cos t - \sin t \end{bmatrix}$$

$$+ c_3 \begin{bmatrix} \cos t - 7 \sin t \\ \cos t - 3 \sin t \\ -\cos t - 3 \sin t \end{bmatrix} - c_3\, i \begin{bmatrix} 7 \cos t + \sin t \\ 3 \cos t + \sin t \\ 3 \cos t - \sin t \end{bmatrix}$$

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{bmatrix} + (c_2 + c_3) \begin{bmatrix} \cos t - 7 \sin t \\ \cos t - 3 \sin t \\ -\cos t - 3 \sin t \end{bmatrix} + (c_2 - c_3)\, i \begin{bmatrix} 7 \cos t + \sin t \\ 3 \cos t + \sin t \\ 3 \cos t - \sin t \end{bmatrix}$$

olup c_2 ve c_3 eşlenik iki kompleks sayı olarak seçilirse

$$c_2 + c_3 = c_2' \quad ; \quad (c_2 - c_3)i = c_3'$$

gibi reel iki keyfi sabit olarak, genel çözüm

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{bmatrix} + c_2' \begin{bmatrix} \cos t - 7 \sin t \\ \cos t - 3 \sin t \\ -\cos t - 3 \sin t \end{bmatrix} + c_3' \begin{bmatrix} 7 \cos t + \sin t \\ 3 \cos t + \sin t \\ 3 \cos t - \sin t \end{bmatrix}$$

dir. Bu çözümün yapısı incelenirse, $k_2 = i$ için bulunan çözümün reel

ve imajiner kısımlarının, birer çözüm olduğu görülür. Bu nedenle, $k_3 = -i$ için, çözüm aramaya gerek yoktur.

ÖRNEK 3. $$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2 + \cos t$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2 - 2x_1 - \sin t$$

sistemini çözünüz.

Homojen sistemin çözümü ÖRNEK 1. de,

$$x_1 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$$

$$x_2 = -c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$$

olarak bulunmuştu. Şimdi de, c_1 ve c_2 nasıl fonksiyonlar olmalıdır ki bu çözüm, verilen homojen olmayan sistemin çözümü olsun, sorusuna cevap arayalım. (Sabitin değişimi kuralı).

$$\frac{dx_1}{dt} = 3c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t} + c_1' e^{3t} + c_2' e^{-t}$$

olup birinci denklemde yerine konursa

$$3c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t} + c_1' e^{3t} + c_2' e^{-t} = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} + 2c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-t} + \cos t$$

$$c_1' e^{3t} + c_2' e^{-t} = \cos t \qquad (1)$$

ve

$$\frac{dx_2}{dt} = -3c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t} - c_1' e^{3t} + c_2' e^{-t}$$

olup ikinci denklemde yerine konursa

$$-3c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t} - c_1' e^{3t} + c_2' e^{-t} = -c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - 2c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-t} - \sin t$$

$$-c_1' e^{3t} + c_2' e^{-t} = -\sin t \qquad (2)$$

elde edilir. (1) ve (2) den

$$2c_1' e^{3t} = \cos t + \sin t$$

$$2c_2' e^{-t} = \cos t - \sin t$$

ve bunlardan da

$$c_1 = \frac{1}{2}\int e^{-3t}(\cos t + \sin t)\,dt = -0{,}1\, e^{-3t}(\sin t + 2\cos t) + k_1$$

$$c_2 = \frac{1}{2}\int e^{t}(\cos t - \sin t)\,dt = \frac{1}{2}\, e^{t}\cos t + k_2$$

bulunur. Bunlar homojen sistemin çözümünde yerlerine konursa, verilen sistemin genel çözümü olarak

$$x_1 = k_1 e^{3t} + k_2 e^{-t} + 0{,}1(3\cos t - \sin t)$$

$$x_2 = -k_1 e^{3t} + k_2 e^{-t} + 0{,}1(7\cos t + \sin t)$$

bulunur.

Şimdi de, aynı sistemin matrisler yardımiyle çözümünü bulalım.

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$$

sisteminin genel çözümü

$$x = X(t)C + x_p(t)$$

olup

$$X = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ -e^{3t} & e^{-t} \end{bmatrix}$$

dir. Şimdi de x_p yi hesaplıyalım.

$$x_p = X\int X^{-1} f(t)\,dt$$

ve

$$X = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ -e^{3t} & e^{-t} \end{bmatrix} \qquad |X| = e^{2t} + e^{2t} = 2\,e^{2t}$$

$$X' = \begin{bmatrix} e^{3t} & -e^{3t} \\ e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} \quad ; \quad X^{-1} = \frac{1}{2\,e^{2t}}\begin{bmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{3t} & e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$X^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-3t} & -e^{-3t} \\ e^{t} & e^{t} \end{bmatrix}$$

olarak

$$x_p = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ -e^{3t} & e^{-t} \end{bmatrix} \int \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-3t} & -e^{-3t} \\ e^{t} & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} dt$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ -e^{3t} & e^{-t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} e^{-3t}(\cos t + \sin t) \\ e^{t}(\cos t - \sin t) \end{bmatrix} dt$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ -e^{3t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int e^{-3t}(\cos t + \sin t)\, dt \\ \int e^{t}(\cos t - \sin t)\, dt \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ -e^{3t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}1\, e^{-3t}(\sin t + 2\cos t) \\ 0{,}5\, e^{t}\cos t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0{,}1(\sin t + 2\cos t) + 0{,}5\cos t \\ 0{,}1(\sin t + 2\cos t) + 0{,}5\cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3\cos t - 0{,}1\sin t \\ 0{,}7\cos t + 0{,}1\sin t \end{bmatrix}$$

bulunur. Bunlara göre genel çözüm

$$x = X(t)C + x_p(t)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ -e^{3t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}1(3\cos t - \sin t) \\ 0{,}1(7\cos t + \sin t) \end{bmatrix}$$

dir.

ÖRNEK 4. $$\frac{dx}{dt} = -5x + 6y + 2z + e^{t}(-2t + 5)$$

$$\frac{dy}{dt} = -4x + 5y + 2z + e^{t}(-2t + 3)$$

$$\frac{dz}{dt} = -4x + 4y + 3z + e^{t}(-2t + 3)$$

sistemini çözünüz.

Homojen sistemin çözümleri

$$x = A\, e^{kt}, \quad y = B\, e^{kt}, \quad z = C\, e^{kt}$$

şeklinde olup bunların homojen sistemi sağlama şartı

$$(-5-k)A+6B+2C=0$$
$$-4A+(5-k)B+2C=0$$
$$-4A+4B+(3-k)C=0$$

dır. Bu sistem ise A , B , C leri bilinmiyen kabul eden bir homojen sistemdir. Bu sistemin $A=B=C=0$ aşikâr çözümünden başka bir çözüm takımının olabilmesi için katsayılar determinantı sıfıra eşit yani,

$$\begin{vmatrix} -5-k & 6 & 2 \\ -4 & 5-k & 2 \\ -4 & 4 & 3-k \end{vmatrix} = (1-k)\,(1+k)\,(k-3)=0$$

olmalıdır.

Buradan da

$$k_1=-1 \;,\; k_2=1 \;,\; k_3=3$$

olması gerektiği sonucuna varılır.

$k_1=-1$ ise $B=C\,,A=2B$ olarak $C=1\,,B=1\,,A=2$;

$k_2=1$ ise $C=0\,,A=B$ olarak $C=0\,,B=1\,,A=1$;

$k_3=3$ ise $A=B=C$ olarak $C=1\,,B=1\,,A=1$

elde edilir. Bunlara göre homojen sistemin çözümü

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,e^{-t} & e^{t} & e^{3t} \\ e^{-t} & e^{t} & e^{3t} \\ e^{-t} & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

olur. Şimdi de homojen olmayan sistemin çözümünü bulmak için x_p özel çözümlerini arayalım.

$$x_p = X \int X^{-1} f(t)\,dt$$

$$X = \begin{bmatrix} 2\,e^{-t} & e^{t} & e^{3t} \\ e^{-t} & e^{t} & e^{3t} \\ e^{-t} & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \quad ; \quad X' = \begin{bmatrix} 2\,e^{-t} & e^{-t} & e^{-t} \\ e^{t} & e^{t} & 0 \\ e^{3t} & e^{3t} & e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$|X| = e^{3t}$$

$$X^{-1} = e^{-3t}\begin{bmatrix} e^{4t} & -e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & -e^{2t} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t} & -e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-3t} & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

olup

$$x_p = \begin{bmatrix} 2e^{-t} & e^{t} & e^{3t} \\ e^{-t} & e^{t} & e^{3t} \\ e^{-t} & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} e^{t} & -e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-3t} & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t}(-2t+5) \\ e^{t}(-2t+3) \\ e^{t}(-2t+3) \end{bmatrix} dt$$

$$x_p = \begin{bmatrix} 2e^{-t} & e^{t} & e^{3t} \\ e^{-t} & e^{t} & e^{3t} \\ e^{-t} & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int 2e^{2t}\,dt \\ \int 0\,.\,dt \\ \int (-2t+1)\,e^{-2t}\,dt \end{bmatrix}$$

$$x_p = \begin{bmatrix} 2e^{-t} & e^{t} & e^{3t} \\ e^{-t} & e^{t} & e^{3t} \\ e^{-t} & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ t\,e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t+2)\,e^{t} \\ (t+1)\,e^{t} \\ (t+1)\,e^{t} \end{bmatrix}$$

dir. O halde

$$x_p = (t+2)e^{t} \ , \ y_p = (t+1)e^{t} \ , \ z_p = (t+1)e^{t}$$

olup verilen sistemin genel çözümü

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} & e^{t} & e^{3t} \\ e^{-t} & e^{t} & e^{3t} \\ e^{-t} & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (t+2)\,e^{t} \\ (t+1)\,e^{t} \\ (t+1)\,e^{t} \end{bmatrix}$$

dir.

21. BÖLÜME AİT PROBLEMLER.

Aşağıdaki diferansiel denklemleri çözünüz.

1) $x^2\,dy - \cos^2 y\,dx = 0$ Cevap. $\operatorname{tg} y + \frac{1}{x} = c$

2) $y^2\,dx + 2y^2\,dy = dy$ Cevap. $x = -\frac{1}{y} - 2y + c$

3) $e^y\,dx + x^2(2 + e^y)\,dy = 0$ Cevap. $-\frac{1}{x} = 2\,e^{-y} - y + e$

4) $\frac{dy}{dx} = xy$ Cevap. $\log y = \frac{1}{2}x^2 + c$

5) $e^{2x+y}\,dx - 2\,e^{x-y}\,dy = 0$ Cevap. $e^x + e^{-2y} = c$

6) $(xy^2 + x)\,dx + (x^2y + y)\,dy = 0$ Cevap. $(x^2 + 1)\,(y^2 + 1) = c$

7) $2y\,dy + 4x^3\sqrt{4 - y^4}\,dx = 0$ Cevap. $y^2 = 2\sin(c - x^4)$

8) $\frac{\log y}{\log x}\,dy - \frac{x^4}{y^2}\,dx = 0$ Cevap. $\frac{y^3}{3}\log y - \frac{y^3}{9} = \frac{x^5}{5}\log x - \frac{x^5}{25} + c$

9) $(x + 2y)\,dx + (-2x + y)\,dy = 0$

Cevap. $2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) = c$

10) $(2x + y)\,dx - y\,dy = 0$ Cevap. $(y - 2x)^2\,(x + y) = c$

11) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 6xy - y^2}{5x^2 + 2xy + y^2}$ Cevap. $(x - y)\,(3x + y) = c\,(x + y)$

12) $x\frac{dy}{dx} = y - \sqrt{x^2 - y^2}$ Cevap. $\log x + \arcsin\frac{y}{x} = c$

13) $(x\sqrt{x^2 + y^2} - y^2)\,dx + xy\,dy = 0$ Cevap. $x\log x + \sqrt{x^2 + y^2} = cx$

14) $\left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}\,e^{y/x}\right)dx + \left(\frac{1}{x}\,e^{y/x} - \frac{1}{y}\right)dy = 0$

Cevap. $y = cx$

15) $(2x - y + 4)\,dy + (x - 2y + 5)\,dx = 0$

Cevap. $(x + y - 1)^3 = c\,(x - y + 3)$

16) $y' = \dfrac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$ Cevap. $3x + y + 2\log(x + y - 1) = c$

17) $y' = \dfrac{x + 2y + 1}{2x + 4y + 3}$ Cevap. $\log(4x + 8y + 5) + 8y - 4x = c$

18) $(x + 2y - 2)\,dx + (2x - y + 3)\,dy = 0$

Cevap. $\dfrac{x^2}{2} + 2xy - 2x - \dfrac{y^2}{2} + 3y = c$

19) $(y - 3x^2 + 2)\,dx + (x - y^2 + 2y)\,dy = 0$

Cevap. $-x^3 - \dfrac{y^3}{3} + xy + y^2 + 2x = c$

20) $(2x^3 + 6xy^2 - 2y^3 + 4x + 3y)\,dx + (6x^2y - 6xy^2 - 4y^3 + 3x - 2y)\,dy = 0$

Cevap. $\dfrac{x^4}{2} + 3x^2y^2 - 2xy^3 - y^4 + 2x^2 + 3xy - y^2 = c$

21) $\arcsin y\,dx + \dfrac{x + 2\sqrt{1 - y^2}\cos y}{\sqrt{1 - y^2}}\,dy = 0$

Cevap. $x \arcsin y + 2 \sin y = c$

22) $\left(\dfrac{1}{x - y} + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(\dfrac{1}{y - x} + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right) dy = 0$

Cevap. $(x - y)^2\,(x^2 + y^2) = c$

23) $(x \log y + y \log x + y)\,dx + \left(\dfrac{x^2}{2y} + x \log x\right) dy = 0$

Cevap. $\dfrac{1}{2} x^2 \log y + xy \log x = c$

24) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x^n \quad (n \neq 0)$ Cevap. $y = \dfrac{x^{n+1}}{n} + cx$

25) $\dfrac{dy}{dx} - y = (3x^2 + 4x - 3)\,e^x$ Cevap. $y = e^x(x^3 + 2x^2 - 3x + c)$

26) $x\dfrac{dy}{dx} + y = e^{2x} - \sin x$ Cevap. $y = \dfrac{1}{2x}(e^{2x} + 2\cos x + c)$

27) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{xy}{x^2 - 1} = x$ Cevap. $y = x^2 - 1 + c\sqrt{x^2 - 1}$

28) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{3y}{2x - 3} = \dfrac{x}{\sqrt{2x - 3}}$ Cevap. $y = \dfrac{4x^3 - 9x^2 + 6c}{6(2x - 3)^{3/2}}$

29) $(2y - x^2 + 1)\,dx + (x^2 - 1)\,dy = 0$ Cevap. $y = \dfrac{(1-x)(x+c)}{1+x}$

30) $[y \cos 2x + 2(\sin 2x)^{3/2}]\,dx + \sin 2x\,dy = 0$

Cevap. $y = \dfrac{\cos 2x + c}{\sqrt{\sin 2x}}$

31) $(a^2 - x^2)\dfrac{dy}{dx} + 2ay = (a^2 - x^2)^2$ Cevap. $y = \dfrac{1}{3}(a-x)(a+x)^2 + \dfrac{c(a-x)}{(a+x)}$

32) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = x^2y^4$ Cevap. $y = (x^3 + cx^6)^{-1/3}$

33) $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{t^2 + s^2}{2st}$ Cevap. $s^2 = t^2 + ct$

34) $(y + xy^2)\,dx - dy = 0$ Cevap. $y = (1 - x + c\,e^{-x})^{-1}$

35) $(x^2 - y^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0$ Cevap. $y = (cx - x^2)^{1/3}$

36) $(y - xy^3)\,dx + x\,dy = 0$ Cevap. $\dfrac{1}{y^2} = 2x + cx^2$

37) $2x\dfrac{dy}{dx} - 2y - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ Cevap. $y = cx - \dfrac{c^2}{2}$

Tekil çöz : $y = \dfrac{x^2}{2}$

38) $y = x\dfrac{dy}{dx} + \log\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ Cevap. $y = cx + \log c$

Tekil çöz : $y = -1 + \log\left(\dfrac{-1}{x}\right)$

39) $y = xy' + y'^2$ Cevap. $y = cx + c^2$; $y = -\dfrac{x^2}{4}$

40) $y = xy' + y'$ Cevap. $y = cx + c$

41) $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$ Cevap. $y = cx + \sqrt{1 + c^2}$; $x^2 + y^2 = 1$

42) $y = xy' + \dfrac{1}{y'}$ Cevap. $y = cx + \dfrac{1}{c}$; $y^2 = 4x$

43) $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\cos\dfrac{y}{x}\,dy = 0$

Cevap. $\sin\dfrac{y}{x} = -\log x + c$

44) $x \log \frac{x}{y}\, dy - y\, dx = 0$ Cevap. $x = y\, e^{cy+1}$

45) $x\, dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right) dy$ Cevap. $x^2 + y^4 = cy^2$

46) $(2xy^2 - y)\, dx + x\, dy = 0$ Cevap. $y = \frac{x}{x^2 + c}$

47) $xy' + y = xy^2 \log x$ Cevap. $xy\,(c - \frac{1}{2} \log^2 x) = 1$

48) $y = xy' + y' \log y'$ Cevap. $y = cx + \log c$;
Tekil çöz : $y = e^{-(x+1)}$

49) $x^2 (y + 1)\, dx + (x^3 - 1)(y - 1)\, dy = 0$ Cevap. $3y + \log \frac{x^3 - 1}{(y + 1)^6} = c$

50) $(1 + y^2)(e^{2x}\, dx - e^y\, dy) - (1 + y)\, dy = 0$

Cevap. $\frac{1}{2} e^{2x} - e^y - \operatorname{arctg} y - \frac{1}{2} \log (1 + y^2) = c$

51) $y' - y \frac{2x - 1}{x^2} = 1$ Cevap. $y = x^2 (1 + c\, e^{1/x})$

52) $y\, e^y = (y^3 + 2x\, e^y)\, y'$ Cevap. $x = y^2 (c - e^{-y})$

53) $y' + y \cos x = \sin x \cos x$ Cevap. $y = c\, e^{-\sin x} + \sin x - 1$

54) $(1 - x^2)\, y' + xy = a$ Cevap. $y = ax + c\sqrt{1 - x^2}$

55) $xy^3\, dx = (x^2 y + 2)\, dy$ Cevap. $x^2 = 1 - \frac{2}{y} + c\, e^{-2/y}$

56) $y' = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1}$ Cevap. $x^3 = c\, e^y - y - 2$

57) $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ Cevap. $y = x \arcsin cx$

58) $yy' + y^2 = \cos x$ Cevap. $y^2 = c\, e^{-2x} + \frac{2}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x$

59) $x\, dy + y\, dx = y^2\, dx$ Cevap. $xy = c\,(y - 1)$

60) $y' (x + \sin y) = 1$ Cevap. $x = c\, e^y - \frac{1}{2} (\sin y + \cos y)$

61) $x^3\,dx - (x^4 + y^3)\,dy = 0$ Cevap. $x^4 = c\,e^{4y} - y^3 - \frac{3}{4}y^2 - \frac{3}{8}y - \frac{3}{32}$

62) $x^2 y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$ Cevap. $(xy + c)(x^2 y + c) = 0$

63) $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = 0$ Cevap. $\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x}{y} = c$

64) $e^y\,dx + (x\,e^y - 2y)\,dy = 0$ Cevap. $x\,e^y - y^2 = c$

65) $y' = \frac{y}{x}(1 + \log y - \log x)$ Cevap. $y = x\,e^{Cx}$

66) $(2\,e^x + y^4)\,dy - y\,e^x\,dx = 0$ Cevap. $2\,e^x - y^4 = cy^2$

67) $a\,(xy' + 2y) = xyy'$ Cevap. $x^2 y = c\,e^{y/a}$

68) $\operatorname{tg} x \frac{dy}{dx} - y = a$ Cevap. $y = c \sin x - a$

69) $xyy'^2 - (x^2 + y^2)\,y' + xy = 0$ Cevap. $(y - cx)(y^2 - x^2 + c) = 0$

70) $(3x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy - 3y^2)\,dy = 0$

Cevap. $x^3 + x^2 y - y^2 x - y^3 = c$

Aşağıdaki diferansiel denklemlerin, verilen başlangıç şartlarına karşılık gelen, çözümlerini bulunuz.

71) $y' = \frac{y + 1}{x}$, $x = 1$ için $y = 0$

Cevap. $y = x - 1$

72) $e^{x-y} y' = 1$, $x = 1$ için $y = 1$

Cevap. $y = x$

73) $e^y (y' + 1) = 1$, $x = 0$ için $y = 0$

Cevap. $y = 0$

74) $y' + y = \cos x$, $x = 0$ için $y = \frac{1}{2}$

Cevap. $y = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$

75) $y' - 2y = -x^2$, $x = 0$ için $y = \frac{1}{4}$

Cevap. $y = \frac{1}{4}(2x^2 + 2x + 1)$

76) $y' + y = 2x$, $x = 0$ için $y = -1$

Cevap. $y = e^{-x} + 2x - 2$

Aşağıdaki diferansiel denklemleri çözünüz.

77) $\frac{d^2y}{dx^2} = e^{2x} + \cos 2x$ Cevap. $y = \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{4} \cos 2x + c_1 x + c_2$

78) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ Cevap. $y = \frac{1}{2} [x\sqrt{1 + x^2} + \log (x + \sqrt{1 + x^2})] + c_1 x + c_2$

79) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = e^{2x}$ Cevap. $y = \frac{1}{4}(2x - 1) e^{2x} + c_1 e^{2x} + c_2$

80) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ Cevap. $y = \log (\sec 2x + c_1) + c_2$

81) $\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0$ Cevap. $y = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx$

82) $y\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4$ Cevap. $y = \frac{2}{c_1} \operatorname{ch} (c_1 x + c_2)$

83) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{y^2}$ Cevap. $c_2 \pm x = \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$

84) $x\frac{d^2y}{dx^4} + 2\frac{dy}{dx} = x^3$ Cevap. $y = \frac{x^4}{20} - c_1 x^{-1} + c_2$

Aşağıdaki diferansiel denklemlerin, verilen başlangıç şartlarına karşılık gelen, çözumlerini bulunuz.

85) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{2} y^2$, $x = 2$ için $y = 4$ ve $\frac{dy}{dx} = 8$

Cevap. $y = 4(3 - x)^{-2}$

86) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \sin x$, $x = \frac{\pi}{2}$ için $y = -3$ ve $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$

Cevap. $y = -\frac{1}{2}(\cos x + \sin x + 5)$

87) $\frac{d^2y}{dx^2} = y$, $x = 0$ için $y = 4$ ve $\frac{dy}{dx} = -5$

Cevap. $y = 4 \text{ ch } x - 5 \text{ sh } x$

88) $y\frac{d^2y}{dx^2} + 4y^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$, $x = 0$ için $y = 1$ ve $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{8}$

Cevap. $y = 1 - \sin \sqrt{8}\, x$

Aşağıdaki diferansiel denklemleri çözünüz.

89) $y'' - 4y = 0$ Cevap. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

90) $y'' - 4y' + 3y = 0$ Cevap. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x}$

91) $y'' + 2y' + 2y = 0$ Cevap. $y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

92) $y'' - 2y' + 3y = 0$ Cevap. $y = e^{x}[c_1 \cos \sqrt{2}\, x + c_2 \sin \sqrt{2}\, x]$

93) $y'' + 6y' + 10y = 0$ Cevap. $y = e^{-3x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

94) $y'' - 5y' + 6y = 0$ Cevap. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

95) $y'' - 9y = 0$ Cevap. $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$

96) $y'' - y' = 0$ Cevap. $y = c_1 + c_2 e^{x}$

97) $y'' - 2y' + 2y = 0$ Cevap. $y = e^{x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

98) $y'' + 4y' + 13y = 0$ Cevap. $y = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

99) $y'' + 2y' + y = 0$ Cevap. $y = (c_1 + c_2 x)\, e^{-x}$

Aşağıdaki diferansiel denklemlerin, verilen başlangıç şartlarına karşılık gelen, çözümlerini bulunuz.

100) $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$

Cevap. $y = \frac{4}{3} e^{-x} - \frac{1}{3} e^{2x}$

101) $y'' + 4y = 0 \quad ; \quad y(0) = 3 \quad , \quad y'(0) = -2$

Cevap. $y = -\sin 2x + 3\cos 2x$

102) $y'' - 5y' + 4y = 0 \quad , \quad y(0) = 5 \quad , \quad y'(0) = 8$

Cevap. $y = 4e^{x} + e^{4x}$

103) $y'' + 3y' + 2y = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = -1$

Cevap. $y = e^{-x}$

104) $y'' + 4y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 2$

Cevap. $y = \sin 2x$

105) $y'' + 2y' = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0$

Cevap. $y = 1$

106) $y'' = \dfrac{y}{a^2} \quad , \quad y(0) = a \quad , \quad y'(0) = 0$

Cevap. $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$

107) $y'' + \pi^2 y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 0$

Cevap. $y = c \sin \pi x$

Aşağıdaki diferansiel denklemleri çözünüz.

108) $y'' + 2y' = e^{x}$ Cevap. $y = c_1 + c_2 e^{-2x} + \dfrac{e^{x}}{3}$

109) $y'' + 2y' + 2y = 2x + 3 + e^{-x}$

Cevap. $y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + x + \dfrac{1}{2} + e^{-x}$

110) $y'' - 4y' + 4y = x^2 - e^{-2x}$

Cevap. $y = (c_1 x + c_2) e^{2x} + \dfrac{1}{4} x^2 + \dfrac{1}{2} x + \dfrac{3}{8} - \dfrac{e^{-2x}}{16}$

111) $y'' - 2y' + y = e^{x}$ Cevap. $y = e^{x}\left(\dfrac{1}{2} x^2 + c_1 x + c_2\right)$

112) $y'' - y = \cos x$ Cevap. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - \dfrac{1}{2} \cos x$

113) $y'' + 2y' + 2y = \sin 2x$

Cevap. $y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) - \frac{1}{5}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x$

114) $y'' + y = \sin x$ Cevap. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$

115) $y'' - 4y' + 4y = x^2$ Cevap. $y = (c_1 + c_2 x) e^{2x} + \frac{1}{8}(2x^2 + 4x + 3)$

116) $y'' + 2y' + y = e^{2x}$ Cevap. $y = (c_1 + c_2 x) e^{-x} + \frac{1}{9} e^{2x}$

117) $y'' - 8y' + 7y = 14$ Cevap. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{7x} + 2$

118) $y'' - y = e^{x}$ Cevap. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^{x}$

119) $y'' + y = \cos x$ Cevap. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x$

120) $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$ Cevap. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - \frac{2}{5}(3 \sin 2x + \cos 2x)$

121) $y'' + y' - 6y = x e^{2x}$ Cevap. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} + x\left(\frac{x}{10} - \frac{1}{25}\right) e^{2x}$

122) $y'' + y' = \sin^2 x$ Cevap. $y = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x + \frac{1}{20}(2 \cos 2x - \sin 2x)$

123) $y'' - 2y' + 5y = e^{x} \cos 2x$

Cevap. $y = e^{x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{x}{4} e^{x} \sin 2x$

124) $y'' - 7y' + 12y = - e^{-4x}$ Cevap. $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x} - x e^{4x}$

125) $y'' - 2y' = x^2 - 1$ Cevap. $y = c_1 + c_2 e^{2x} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6}$

126) $y'' - 2y' + y = 2 e^{x}$ Cevap. $y = e^{x}(c_1 + c_2 x + x^2)$

127) $y'' - 2y' = e^{2x} + 5$ Cevap. $y = c_1 + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{5}{2} x$

128) $y'' - 2y' - 8y = e^{x} - 8 \cos 2x$

Cevap. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{4x} - \frac{1}{9} e^{x} + \frac{1}{5}(3 \cos 2x + \sin 2x)$

129) $y'' + y' = 5x + 2\,e^x$ Cevap. $y = c_1 + c_2\,e^{-x} + e^x + \frac{5}{2}x^2 - 5x$

130) $y'' - y' = 2x - 1 - 3\,e^x$ Cevap. $y = c_1 + c_2\,e^x - 3x\,e^x - x - x^2$

131) $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + e^x$

Cevap. $y = (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)\,e^x + \frac{1}{37}(\sin 3x + 6\cos 3x) + \frac{e^x}{9}$

132) $y'' - y = 2x \sin x$ Cevap. $y = c_1\,e^x + c_2\,e^{-x} - x \sin x - \cos x$

133) $y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$

Cevap. $y = c_1\,e^{-2x} + c_2\,e^{2x} - \frac{e^{2x}}{20}(\sin 2x + 2\cos 2x)$

134) $y'' + 4y = 2 \sin 2x - 3 \cos 2x + 1$

Cevap. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{x}{4}(3 \sin 2x + 2 \cos 2x) + \frac{1}{4}$

135) $y'' + 9y = 2x \sin x + x\,e^{3x}$

Cevap. $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{1}{4}x \sin x - \frac{1}{16}\cos x + \frac{1}{54}(3x - 1)\,e^{3x}$

136) $y'' - 2y' - 3y = x(1 + e^{3x})$

Cevap. $y = c_1\,e^{3x} + c_2\,e^{-x} + \frac{1}{9}(2 - 3x) + \frac{1}{16}(2x^2 - x)\,e^{3x}$

137) $y'' + 2y' - 3y = 2x\,e^{-3x} + (x + 1)\,e^x$

Cevap. $y = c_1\,e^{-3x} + c_2\,e^x - \frac{1}{8}(2x^2 + x)\,e^{-3x} + \frac{1}{16}(2x^2 + 3x)\,e^x$

138) $y'' + y = 2x \cos x \cos 2x$

Cevap. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{4}\cos x + \frac{x^2}{4}\sin x - \frac{x}{8}\cos 3x + \frac{3}{32}\sin 3x$

Aşağıdaki diferansiel denklemlerin, verilen başlangıç şartlarına karşılık gelen, çözümlerini bulunuz.

139) $y'' - y = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

Cevap. $y = -x + \operatorname{ch} x$

140) $y'' + y' - 6y = -4\,e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

Cevap. $y = e^{x} - \frac{1}{5} e^{-3x} - \frac{4}{5} e^{2x}$

141) $y'' + 4y = e^{x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

Cevap. $y = \frac{1}{5} e^{x} - \frac{1}{5} \cos 2x - \frac{1}{10} \sin 2x$

142) $y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1$, $y(0) = \frac{1}{8}$, $y'(0) = 1$

Cevap. $y = \frac{1}{8} e^{2x} (4x + 1) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}$

Aşağıdaki diferansiel denklemleri, sabitin değişimi kuralı ile, çözünüz.

143) $y'' + y = \sec^3 x$ Cevap. $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x - \cos x + \frac{1}{2} \sec x$

144) $y'' - y = x\, e^{x}$ Cevap. $y = \left(\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x + c_1\right) e^{x} + c_2\, e^{-x}$

145) $y'' + 2y' + y = x\, e^{-x}$ Cevap. $y = \left(\frac{1}{6} x^3 + c_1 x + c_2\right) e^{-x}$

146) $y'' + y = \operatorname{tg} x$ Cevap. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \log \operatorname{cotg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

147) $y'' + y = \operatorname{cotg} x$ Cevap. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \sin x \log \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

148) $y'' - 2y' + y = \frac{e^{x}}{x}$ Cevap. $y = (c_1 + c_2 x)\, e^{x} + x\, e^{x} \log x$

149) $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$ Cevap. $y = (c_1 + c_2 x)\, e^{-x} + x\, e^{-x} \log x$

150) $y'' - y = \frac{1}{\cos x}$ Cevap. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \sin x + \cos x \log \cos x$

151) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ Cevap. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x \cos x + \sin x \log \sin x$

152) $y'' - y = \operatorname{th} x$ Cevap. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + (e^{x} + e^{-x}) \operatorname{arctg} e^{x}$

153) $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}$ Cevap. $y = c_1 e^{\sqrt{2}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{2}\, x} + e^{x^2}$

154) $y'' - y = \dfrac{2\,e^x}{e^x - 1}$

Cevap. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + (e^x - e^{-x}) \log (e^x - 1) - x e^x - 1 + e^{-x}$

155) $y'' + y' = 1 + x^2 + \dfrac{2 - x}{x^3}$ Cevap. $y = c_1 + c_2 e^{-x} + \dfrac{1}{x} + x \left(\dfrac{x^2}{3} - x + 3 \right)$

156) $y'' - 3y' + 2y = \sin e^{-x}$ Cevap. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - e^{2x} \sin e^{-x}$

Aşağıdaki diferansiel denklemleri çözünüz.

157) $y''' - 13y'' + 12y' = 0$ Cevap. $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{12x}$

158) $y''' - y' = 0$ Cevap. $y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^x$

159) $y''' + y' = 0$ Cevap. $y = c_1 e^{-x} + e^{x/2} \left(c_2 \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2} x + c_3 \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2} x \right)$

160) $y^{IV} - 2y'' = 0$ Cevap. $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{\sqrt{2}\, x} + c_4 e^{-\sqrt{2}\, x}$

161) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ Cevap. $y = e^x (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)$

162) $y^{IV} + 4y = 0$ Cevap. $y = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{-x} (c_3 \cos x + c_4 \sin x)$

163) $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$ Cevap. $y = (c_1 + c_2 x) \cos 2x + (c_3 + c_4 x) \sin 2x$

164) $y^{IV} + y' = 0$ Cevap. $y = c_1 + c_2 e^{-x} + e^{x/2} \left(c_3 \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2} x + c_4 \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2} x \right)$

165) $y^{IV} - 2y'' + y = 0$ Cevap. $y = (c_1 + c_2 x) e^{-x} + (c_3 + c_4 x) e^x$

166) $y^{IV} - a^4 y = 0$ Cevap. $y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax} + c_3 \cos ax + c_4 \sin ax$

167) $y^{IV} - 6y'' + 9y = 0$ Cevap. $y = (c_1 + c_2 x) e^{\sqrt{3}\, x} + (c_3 + c_4 x) e^{-\sqrt{3}\, x}$

168) $y^{IV} + a^2 y'' = 0$ Cevap. $y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos ax + c_4 \sin ax$

169) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$ Cevap. $y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x)\, e^{-x}$

170) $y^{IV} + 2y'' + y = 0$ Cevap. $y = (c_1 + c_2 x) \cos x + (c_3 + c_4 x) \sin x$

171) $y''' = 0$ Cevap. $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$

172) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ Cevap. $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)\ e^{-x}$

173) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}$

Cevap. $y = c_1\ e^{x} + c_2\ e^{2x} + c_3x\ e^{2x} + \frac{1}{2}x^2\ e^{2x}$

174) $y''' - 3y' + 2y = 2\ e^{x}$ Cevap. $y = \left(\frac{1}{3}\ x^2 + c_1x + c_2\right) e^{x} + c_3\ e^{-2x}$

175) $y''' - 2y'' + y' = 1$ Cevap. $y = x + c_1 + (c_2 + c_3x)\ e^{x}$

176) $y^{IV} - y''' = x\ e^{x}$ Cevap. $y = e^{x}\left(\frac{1}{2}\ x^2 - 3x + c_1\right) + c_2 + c_3x + c_4x^2$

177) $y^{IV} - 8y'' + 16y = x\ e^{2x}$

Cevap. $y = e^{2x}\left(\frac{1}{96}\ x^3 - \frac{1}{64}\ x^2 + c_1x + c_2\right) + (c_3 + c_4x)\ e^{-2x}$

178) $y^{IV} + 5y'' + 4y = x$

Cevap. $y = \frac{1}{4}\ x + c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + c_3\cos x + c_4\sin x$

179) $y''' + 8y = 4x^3 - x^2$

Cevap. $y = -\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\ x^2 + \frac{1}{2}\ x^3 + c_1\ e^{-2x} + e^{x}(c_2\ \cos\sqrt{3}\ x + c_3\sin\sqrt{3}\ x)$

180) $y^{IV} + 8y'' - 9y = \cos 3x + e^{2x}$

Cevap. $y = \frac{1}{39}\ e^{2x} + (-\frac{1}{60}\ x + c_1)\ \sin 3x + c_2\ \cos 3x + c_3\ e^{-x} + c_4\ e^{x}$

181) $y^{IV} - 2y''' + y'' = e^{x}$

Cevap. $y = c_1 + c_2x + \left(c_3 + c_4x + \frac{x^2}{2}\right)\ e^{x}$

182) $y^{IV} - 2y''' + y'' = x^3$

Cevap. $y = c_1 + c_2x + 12x^2 + 3x^3 + \frac{1}{2}\ x^4 + \frac{1}{20}\ x^5 + (c_3 + c_4x)\ e^{x}$

183) $y''' - y = x^3 - 1$

Cevap. $y = c_1\ e^{x} + e^{-x/2}(c_2\ \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ x + c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ x) - x^3\ - 5$

184) $y^{IV} + y''' = \cos 4x$

Cevap. $y = c_1 + c_2\ x + c_3\ x^2 + c_4\ e^{-x} + \frac{1}{1088}\ (4\cos 4x - \sin 4x)$

185) $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3x\ e^{x}$

Cevap. $y = c_1\ e^{-x} + c_2 + c_3\ x + \frac{3}{2}\ x^2 - \frac{1}{3}\ x^3 + \frac{1}{12}\ x^4 + e^{x}\left(\frac{3}{2}\ x - \frac{15}{4}\right)$

186) $y''' + y'' + y' + y = x\, e^x$

Cevap. $y = c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x + e^x \left(\frac{x}{4} - \frac{3}{8}\right)$

187) $y''' + y' = \operatorname{tg} x \sec x$

Cevap. $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \sec x + \cos x \log \cos x - \operatorname{tg} x \sin x + x \sin x$

188) $y''' + y' = \sec x$

Cevap. $y = c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x + \log (\sec x + \operatorname{tg} x) + \sin x \log \cos x - x \cos x$

Aşağıdaki Euler denklemlerini çözünüz.

189) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ Cevap. $y = c_1 x + c_2 x^2$

190) $x^3 y''' + 2x^2 y'' + x y' - y = 0$ Cevap. $y = c_1 x + c_2 \cos \log x + c_3 \sin \log x$

191) $x^2 y'' + xy' + 4y = 0$ Cevap. $y = c_1 \cos (2 \log x) + c_2 \sin (2 \log x)$

192) $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$ Cevap. $y = (c_1 + c_2 \log x) \frac{1}{x}$

193) $x^2 y'' - xy' - 3y = 0$ Cevap. $y = c_1 x^3 + \frac{c_2}{x}$

194) $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$

Cevap. $y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$

195) $x^2 y'' - 4xy' + 6y = x$ Cevap. $y = c_1 x^3 + c_2 x^2 + \frac{1}{2} x$

196) $x^2 y'' - xy' + 4y = \cos \log x + x \sin \log x$

Cevap. $y = x\,[c_1 \cos (\sqrt{3} \log x) + c_2 \sin (\sqrt{3} \log x)] + \frac{1}{13} (3 \cos \log x -$

$2 \sin \log x) + \frac{1}{2} \sin \log x$

197) $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 2 \log x$ Cevap. $y = \log x - \frac{3}{2} + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2}$

198) $x^2 y'' - xy' + y = x \log x$ Cevap, $y = x \left[\frac{1}{6} (\log x)^3 + c_1 \log x + c_2\right]$

199) $x^3 y''' + xy' - y = x \log x$

Cevap. $y = x \left[\frac{1}{24} (\log x)^4 + c_1 (\log x)^2 + c_2 \log x + c_3\right]$

200) $x^2y'' + xy' + 4y = \cos(2\log x)$

Cevap. $y = c_1 \cos(2\log x) + c_2 \sin(2\log x) + \frac{1}{4}\log x \sin(2\log x)$

Aşağıdaki diferansiel denklem sistemlerini çözünüz.

201) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + 4y + 7z = 0 \\ \frac{dz}{dx} - 7y - 10z = 0 \end{cases}$ Cevap. $\begin{cases} y = (c_1x + c_2)\, e^{3x} \\ z = -\left(c_1x + \frac{c_1}{7} + c_2\right) e^{3x} \end{cases}$

202) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4y + 2z + x \\ \frac{dz}{dx} = -y + z \end{cases}$ Cevap. $\begin{cases} y = -\frac{x}{6} + \frac{1}{36} - 2c_1\, e^{3x} - c_2\, e^{2x} \\ z = -\frac{x}{6} - \frac{5}{36} + c_1\, e^{3x} + c_2\, e^{2x} \end{cases}$

203) $\begin{cases} (D-3)\, y_1 + 2(D+2)\, y_2 = 2\sin x \\ 2(D+1)\, y_1 + (D-1)\, y_2 = \cos x \end{cases}$

Cevap. $\begin{cases} y_1 = c_1\, e^{-5x} + c_2\, e^{-x/3} + \frac{1}{65}(8\sin x + \cos x) \\ y_2 = -\frac{4}{3} c_1\, e^{-5x} + c_2\, e^{-x/3} + \frac{1}{130}(61\sin x - 33\cos x) \end{cases}$

204) $\begin{cases} (D^2+4)\, y_1 - 3Dy_2 = 0 \\ 3Dy_1 + (D^2+4)\, y_2 = 0 \end{cases}$

Cevap. $\begin{cases} y_1 = c_1\cos 4x + c_2\sin 4x + c_3\cos x + c_4\sin x \\ y_2 = c_2\cos 4x - c_1\sin 4x - c_4\cos x + c_3\sin x \end{cases}$

205) $\begin{cases} (D+1)^2\, y_1 + 2Dy_2 + 3Dy_3 = 1 \\ Dy_1 + y_3 = 0 \\ y_1 - Dy_2 - Dy_3 = 0 \end{cases}$ Cevap. $\begin{cases} y_1 = \frac{1}{3} + c_1\, e^{-3x/2} \\ y_2 = \frac{x}{3} - \frac{13}{6} c_1\, e^{-3x/2} + c_2 \\ y_3 = \frac{3}{2} c_1\, e^{-3x/2} \end{cases}$

206) $\begin{cases} (D^2+D+1)\, y + (D^2+1)\, z = e^x \\ (D^2+D)\, y + D^2z = e^{-x} \end{cases}$ Cevap. $\begin{cases} y = -e^x - 2e^{-x} + c_1 \\ z = 2e^x + e^{-x} - c_1 \end{cases}$

207) $\begin{cases} (D-1)\,y_1 + (D+2)\,y_2 = 1 + e^x \\ (D+2)\,y_2 + (D+1)\,y_3 = 2 + e^x \\ (D-1)\,y_1 + (D+1)\,y_3 = 3 + e^x \end{cases}$ Cevap. $\begin{cases} y_1 = -1 + x\dfrac{e^x}{2} + c_2 e^x \\ y_2 = \dfrac{e^x}{6} + c_1 e^{-2x} \\ y_3 = 2 + \dfrac{e^x}{4} + c_3 e^{-x} \end{cases}$

208) $\dfrac{dx}{dt} = y \quad , \quad \dfrac{dy}{dt} = x$ Cevap. $\begin{cases} x = c_1 e^{-t} + c_2 e^t \\ y = -c_1 e^{-t} + c_2 e^t \end{cases}$

209) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 2y \end{cases}$ Cevap. $\begin{cases} x = c_1 e^{-t} - c_2 e^{3t} \\ y = c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{3t} \end{cases}$

210) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + 2e^{-2t} \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 3y - e^{-2t} \end{cases}$

Cevap. $\begin{cases} x = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t} + \dfrac{11}{6} t\, e^{-2t} \\ y = 5c_1 e^{4t} - c_2 e^{-2t} + \left(-\dfrac{11}{6} t - \dfrac{1}{6}\right) e^{-2t} \end{cases}$

211) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = -2y \end{cases}$ Cevap. $\begin{cases} x = c_1 e^{-t} + c_2 e^t + c_3 e^{2t} \\ y = -2c_1 e^{-t} + c_3 e^{2t} \\ z = -4c_1 e^{-t} - c_3 e^{2t} \end{cases}$

212) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 - x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_2 - x_3 \end{cases}$ Cevap. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^t & 4e^{2t} \\ 0 & -2e^t & -3e^{2t} \\ -e^{-t} & -e^t & -e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

213) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_2 + x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 \end{cases}$ Cevap. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-t} & e^t \\ e^{-2t} & 0 & -e^t \\ -e^{-2t} & -e^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

214) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -2x_1 - x_2 - x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases}$ Cevap. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & e^t \\ -e^{-t} & -1 & -e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

215) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{cases}$ Cevap. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 1 & e^t \\ e^{-2t} & 1 & 2e^t \\ e^{-2t} & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

216) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -5x_1 + 6x_2 + 2x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -4x_1 + 4x_2 + 3x_3 \end{cases}$ Cevap. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} & e^t & e^{3t} \\ e^{-t} & e^t & e^{3t} \\ e^{-t} & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

217) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 - x_3 - t + 5 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_2 - x_3 - 2t + 2 \end{cases}$

Cevap. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^t & 4e^{2t} \\ 0 & -2e^t & -3e^{2t} \\ -e^{-t} & -e^t & -e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t+1 \\ 2t-1 \\ 1 \end{bmatrix}$

218) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -2x_1 - x_2 - x_3 + 5\cos t - 4\sin t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_3 + 5\cos t - 4\sin t \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 11\cos t + 2\sin t \end{cases}$

Cevap. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & e^t \\ -e^{-t} & -1 & -e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos t - 2\sin t \\ 2\cos t + \sin t \\ 3\cos t \end{bmatrix}$

219) $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2\sin t \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

Cevap. $$\begin{cases} x_1 = 2c_1 + c_3 e^t + 4(\cos t - \sin t) \\ x_2 = c_1 + c_2 e^t + \cos t - 3\sin t \\ x_3 = -c_1 + 2c_2 e^t - 2c_3 e^t + 2(\sin t - \cos t) \end{cases}$$

22. BÖLÜM

KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER

22.1 Tanımlar.

x, y,... bağımsız değişkenleri, bu değişkenlerin bir z fonksiyonu ve bu fonksiyonun kısmi türevleri arasındaki bir bağıntıya *kısmi diferansiel denklem* veya *kısmi türevli denklem* denir.

Böyle bir denklem sembolik olarak

$$F\left(x, y, \ldots, u, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^n . z}{\partial x^\alpha \ldots \partial u^\lambda}\right) = 0$$

şeklinde gösterilebilir.

Kısmi türevli bir denklemin mertebesi, denklemde bulunan en yüksek mertebeli türevin mertebesidir.

Kısmi türevli bir denklemin çözümü, bu denklemi özdeş olarak sağlıyan bir

$$z = f(x, y, \ldots, u)$$

fonksiyonudur. z fonksiyonu x ve y gibi iki değişkenli bir fonksiyon ise, kısmi türevli denklemin bütün çözümleri, açık olarak

$$z = f(x,y)$$

veya kapalı olarak

$$F(x,y,z) = 0$$

şeklindedir.

Geometrik olarak bu denklemlerin gösterdiği yüzeylere, *integral yüzeyleri* denir.

n. mertebeden, adi diferansiel denklemin genel çözümünde, n tane keyfi sabit bulunmakta idi. n. mertebeden bir kısmi türevli denklemin genel çözümü de, n tane keyfi fonksiyon içerir.

Örneğin, $z = f(x - y\,, y - x)$ fonksiyonu, ne şekilde olursa olsun,

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

kısmi türevli denkleminin bir çözümüdür.

Gerçekten, $u = x - y\ , v = y - x$ kabul edilirse

$$z = f(u,v)$$

olur. Bu fonksiyon bir bileşik fonksiyon olup, türevleri hesaplanırsa

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

elde edilir. Bunlar kısmi türevli denklemde yerlerine konursa,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

olarak $z = f(x - y\ , y - x)$ in denklemi sağladığı görülür.

Birinci mertebeden bir kısmi türevli denklemin genel çözümü, bir tane *keyfi fonksiyon* içerir.

22.2 Özel şekillerdeki kısmi türevli denklemler.

Evvelâ, elemanter kurallarla çözülebilecek özel şekillerdeki kısmi türevli denklemlerin çözümlerini inceliyeceğiz.

ÖRNEK 1. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -a^2 z$ denklemini çözünüz. $z = z(x, y)$

z fonksiyonu yalnız x in bir fonksiyonu olsa idi, bu denklemin karakteristik denklemi

$$r^2 + a^2 = 0$$

olarak, kökleri $r = \pm a i$ ve denklemin genel çözümü de

$$z = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax$$

olacaktı. Bu çözümün verilen kısmi türevli denklemin çözümü olabilmesi için, c_1 ve c_2 nin x den bağımsız, fakat y ye bağlı olması gerekir. Buna göre verilen denklemin genel çözümü

$$z = \phi_1(y) \cos ax + \phi_2(y) \sin ax$$

dir. Buradaki $\phi_1(y)$, $\phi_2(y)$ ler, keyfi fonksiyonlardır.

Buradan görülür ki ikinci mertebeden olan bu kısmi türevli denklemin genel çözümü, iki keyfi fonksiyon içerir.

ÖRNEK 2. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ denklemini sağlıyan bütün z fonksiyonlarını bulunuz.

Denklemin her iki tarafının, x e göre bir defa integrali alınırsa

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi_1(y)$$

elde edilir. İkinci taraf x den bağımsız, fakat y ye bağlı bir fonksiyondur. Her iki tarafın x e göre bir defa daha integrali alınırsa,

$$z = x\,\varphi_1(y) + \varphi_2(y)$$

elde edilir. Bu bağıntı, $\varphi_1(y)$ ve $\varphi_2(y)$ gibi iki keyfi fonksiyon içerdiğinden, verilen denklemin genel çözümüdür.

ÖRNEK 3. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0$ denklemini çözünüz.

Denklemin her iki tarafının y ye göre integrali alınırsa

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi_1(x)$$

elde edilir. $\varphi_1(x)$, x in keyfi bir fonksiyonudur. Şimdi de elde edilen yeni denklemin her iki tarafının x e göre integrali alınırsa

$$z = \int \varphi_1(x)\, \mathrm{d}x + \varphi_3(y)$$

veya

$$z = \varphi_2(x) + \varphi_3(y)$$

bulunur. Bu da iki keyfi fonksiyonu içerdiğinden, genel çözümdür.

ÖRNEK 4. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P(x,y)\,\dfrac{\partial z}{\partial x} = Q(x,y)$ denklemini çözünüz.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p$$

dönüştürmesi yapılırsa denklem,

$$\frac{\partial p}{\partial x} + P(x,y)\, p = Q(x,y)$$

şeklini alır. Burada x, bağımsız değişken ve y parametre olarak kabul edilirse, denklem birinci mertebeden bir lineer diferansiel denklem olur. Bunun genel çözümü de

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{e}^{-\int P\,\mathrm{d}x} \left[\int \mathrm{e}^{\int P\,\mathrm{d}x}\, Q(x,y)\, \mathrm{d}x + \varphi_1(y) \right]\cdot$$

dir. $\varphi_1(y)$, y nin keyfi bir fonksiyonu olup x e göre keyfi sabit rolünü oynar. Bu son denklemin, her iki tarafının, x e göre integrali alınırsa,

$$z = \int e^{-\int P\,dx} \left[\int e^{\int P\,dx} Q(x,y)\,dx + \varphi_1(y) \right] dx + \varphi_2(y)$$

elde edilir. $\varphi_2(y)$, y nin keyfi bir fonksiyonudur. z i veren bu bağıntı $\varphi_1(y)$ ve $\varphi_2(y)$ gibi iki keyfi fonksiyon içerdiğinden verilen kısmi türevli denklemin genel çözümüdür.

Bu tip'e örnek olarak,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} = xy$$

denklemi, yukarıda açıklanan şekilde çözülürse,

$$z = \varphi_1(y)\log x + \frac{1}{9}x^3 y + \varphi_2(y)$$

bulunur.

ÖRNEK 5. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + P(x,y)\dfrac{\partial z}{\partial x} = Q(x,y)$

denklemini çözünüz.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p$$

dönüştürmesi yapılırsa denklem,

$$\frac{\partial p}{\partial y} + P(x,y)\,p = Q(x,y)$$

şeklini alır. Bu da y yi bağımsız değişken ve x i parametre kabul eden bir lineer diferansiel denklemdir. Bu denklemin genel çözümü,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = e^{-\int P\,dy}\left[\int e^{\int P\,dy} Q(x,y)\,dy + \varphi_1(x) \right]$$

olup her iki tarafın x e göre integrali alınırsa,

$$z = \int e^{-\int P\,dy}\left[\int e^{\int P\,dy} Q(x,y)\,dy + \varphi_1(x)\right] dx + \varphi_2(y)$$

elde edilir. Buradaki $\varphi_2(y)$, y nin keyfi bir fonksiyonudur. Elde edilen son bağıntı, $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(y)$ gibi iki keyfi fonksiyonu içerdiğinden, verilen ikinci mertebeden kısmi türevli denklemin genel çözümüdür.

Bu tip'e örnek olarak,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} + \frac{1}{y}\,\frac{\partial z}{\partial x} = xy$$

denklemini alır ve yukarıda açıklanan şekilde çözersek,

$$z = \frac{x^2 y^2}{6} + \frac{1}{y}\varphi_1(x) + \varphi_2(y)$$

bulunur.

ÖRNEK 6. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P(y)\dfrac{\partial z}{\partial x} + Q(y)\,z = 0$ denklemini çözünüz.

x bağımsız değişken ve y parametre olarak kabul edilirse, verilen denklem, ikinci mertebeden sabit katsayılı ve ikinci tarafsız bir lineer diferansiel denklem olur. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$r^2 + P(y)\,r + Q(y) = 0$$

dır. Bu denklemin kökleri $r_1(y)$ ve $r_2(y)$ ise verilen denklemin genel çözümü

$$z = \varphi_1(y)\,e^{r_1(y)\,x} + \varphi_2(y)\,e^{r_2(y)\,x}$$

olur. $\varphi_1(y)$ ve $\varphi_2(y)$, y nin iki keyfi fonksiyonudur.

22.3 Birinci mertebeden lineer kısmi türevli denklemler.

Birinci mertebeden, lineer kısmi türevli denklemler genel olarak,

$$\boxed{P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z)} \tag{1}$$

şeklindedir. P, Q, R ler x, y, z lerin verilmiş fonksiyonlarıdır. Bu denklem $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ türevlerine göre lineerdir.

Lagrange, aşağıda vereceğimiz bir teoremle (1) kısmi türevli denkleminin çözümünü, Lagrange sistemi veya (1) denkleminin *yardımcı sistemi* adı verilen

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)} \tag{2}$$

şeklindeki adi diferansiel denklem sisteminin çözümüne dönüştürmüştür. Buradaki x, y, z değişkenlerinden herhangi ikisi, bağımsız değişken olarak seçilmiş üçüncü değişkenin fonksiyonlarıdır.

TEOREM.

$$u(x,y,z)=c_1 \quad , \quad v(x,y,z)=c_2$$

bağıntıları

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$

sisteminin iki farklı asal integrali ise (Bak. 21.7-1)

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z)$$

kısmi türevli denkleminin genel çözümü

$$F(u, v) = 0$$

dır.

İspat. $u(x, y, z) = c_1$, $v(x, y, z) = c_2$ denklemleri x, y, z den ikisini, üçüncünün fonksiyonları olarak belirtirler ve

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

denklemlerini sağlarlar.

Buna göre $u(x, y, z) = c_1$ den

$$u'_x \, dx + u'_y \, dy + u'_z \, dz = 0$$

yazılıp dx, dy, dz ler yerine kendileri ile orantılı olan P, Q, R ler yazılırsa,

$$P u'_x + Q u'_y + R u'_z = 0$$

elde edilir. Aynı şekilde $v(x, y, z) = c_2$ den

$$v'_x \, dx + v'_y \, dy + v'_z \, dz = 0$$

yazılıp dx, dy, dz ler yerine, kendilerile orantılı olan, P, Q, R ler yazılırsa,

$$P v'_x + Q v'_y + R v'_z = 0$$

elde edilir. Bu son iki denklem P, Q, R i bilinmiyen kabul eden bir homojen denklem sistemi olup, P, Q, R e göre çözülürse

$$\frac{P}{\dfrac{D(u,v)}{D(y,z)}} = \frac{Q}{\dfrac{D(u,v)}{D(z,x)}} = \frac{R}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}}$$

elde edilir.

$F(u, v) = 0$ denklemi, x, y, z arasındaki bir bağıntı olsun. Buradaki u, v ler x, y, z nin bilinen fonksiyonları ve F de u ve v nin keyfi bir fonksiyonudur.

$z = z(x, y)$ olduğu gözönüne alınarak, $F(u, v) = 0$ ın x ve y ye göre türevlerini yazalım.

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

Bu iki denklem arasında, $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ ve $\dfrac{\partial F}{\partial v}$ yok edilirse

$$\frac{D(u,v)}{D(y,z)}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{D(u,v)}{D(z,x)}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)}$$

kısmi türevli denklemi elde edilir.

u ve v fonksiyonları

$$u(x, y, z) = c_1 \quad , \quad v(x, y, z) = c_2$$

denklemleriyle verilmişlerse yani bunlar (2) sisteminin iki asal integrali ise

$$\frac{P}{\dfrac{D(u,v)}{D(y,z)}} = \frac{Q}{\dfrac{D(u,v)}{D(z,x)}} = \frac{R}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}}$$

$$\frac{D(u,v)}{D(y,z)}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{D(u,v)}{D(z,x)}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)}$$

denklemlerinden

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z)$$

elde edilir ki bu da, (1) denkleminden başka bir şey değildir.

O halde, u ve v fonksiyonları $u = c_1$, $v = c_2$ denklemleriyle verilmişlerse, $F(u, v) = 0$ bağıntısı (1) denkleminin çözümüdür.

Tam çözümler :

$$u(x, y, z) = c_1 \quad , \quad v(x, y, z) = c_2$$

(2) sisteminin, iki farklı asal integrali ise, $F(u, v) = 0$, (1) denkleminin genel çözümünü verir. F, keyfi bir fonksiyondur.

$F(u, v)$ keyfi bir fonksiyon olarak seçilmişse,

$$u = \alpha v + \beta$$

fonksiyonu (1) denkleminin bir *tam çözümüdür.* α ve β iki keyfi sabittir.

Teoremin genelleştirilmesi :

$P_1, P_2, \ldots, P_n, P$ ler $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve z e bağlı olarak

$$P_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = P$$

denklemi verilmiş olsun. Bu denklemin yardımcı sistemi

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots . = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{P}$$

olur. Buradaki $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ değişkenlerinden n tanesine, $n+1$ incinin fonksiyonu olarak bakılabilir.

Yardımcı sistemin n asal integrali

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) &= c_1 \\
\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) &= c_2 \\
\ldots \ldots \ldots \ldots & \ldots \ldots \\
\ldots \ldots \ldots \ldots & \ldots \ldots \\
\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) &= c_n
\end{aligned}$$

olsun. $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ fonksiyonlarından en az birinin z i içerdiğini kabul ediyoruz. Bu takdirde

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0$$

verilen denklemin genel çözümüdür.

İhtar : $P_1, P_2, \ldots, P_n, P$ fonksiyonlarından bazıları sıfıra eşit olabilir. Örneğin

$$P_1 = P_2 = 0$$

ise yardımcı sistem

$$\mathrm{d}x_1 = 0 \quad , \quad \mathrm{d}x_2 = 0 \quad , \quad \frac{\mathrm{d}x_3}{P_3} = \ldots . = \frac{\mathrm{d}x_n}{P_n} = \frac{\mathrm{d}z}{P}$$

şekline girer. Bu takdirde $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, bu sistemin iki asal integrali olur.

ÖRNEK 1. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$ kısmi türevli denklemini çözünüz.

Bu denklemin yardımcı sistemi

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{-y} = \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

olup buradan,

$$x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x = 0 \rightarrow \mathrm{d}(xy) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

yazılabilir. Bu denklemler çözülürse

$$xy = c_1$$

$$\frac{z}{x} = c_2$$

bulunur.

$xy = c_1$, $\dfrac{z}{x} = c_2$ bağıntıları, yardımcı sistemin iki asal integralidir. Bunlara göre verilen kısmi türevli denklemin genel çözümü,

$$F\left(xy, \frac{z}{x}\right) = 0$$

dır. F, keyfi seçilmiş bir fonksiyondur.

$\frac{z}{x} = \alpha xy + \beta$ bağıntısı da, α ve β keyfi sabitler olarak, verilen denklemin bir tam çözümüdür.

Sağlama. $z = \alpha x^2 y + \beta x$ verilen denklemin çözümüdür. Zira

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\alpha xy + \beta \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \alpha x^2$$

olarak

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 2\alpha x^2 y + \beta x - \alpha x^2 y = z$$

dir.

ÖRNEK 2. $(y - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (z - x) \frac{\partial z}{\partial y} = x - y$ kısmi türevli denklemini çözünüz.

Denklemin yardımcı sistemi :

$$\frac{dx}{y - z} = \frac{dy}{z - x} = \frac{dz}{x - y}$$

olup buradan

$$(y - z) + (z - x) + (x - y) = 0$$

$$x(y - z) + y(z - x) + z(x - y) = 0$$

olduğu görülerek

$$dx + dy + dz = 0$$

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

denklemleri ve bunlardan da

$$x + y + z = c_1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_2$$

asal integralleri elde edilir. Bunlara göre verilen kısmi türevli denklemin genel çözümü

$$F(x + y + z \quad , \quad x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

dır.

ÖRNEK 3. $(x + z) \dfrac{\partial z}{\partial x} + (y + 2z) \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ kısmi türevli denklemini çözünüz.

Denklemin yardımcı sistemi

$$\frac{dx}{x + z} = \frac{dy}{y + 2z} = \frac{dz}{0}$$

olup bunlardan

$$dz = 0$$

$$\frac{dx}{x + z} = \frac{dy}{y + 2z}$$

olduğu görülür. Bu denklemlerin integralleri alınırsa

$$z = c_1$$

$$\int \frac{dx}{x + z} = \int \frac{dy}{y + 2z}$$

$$\log (x + z) = \log (y + 2z) + \log c_2$$

veya

$$z = c_1$$

$$\frac{x + z}{y + 2z} = c_2$$

bulunur. İntegrallerin alınışında $z = c_1 = st$ olduğu gözönünde tutulmuştur. Bunlara göre verilen denklemin genel çözümü

$$F\left(z, \frac{x + z}{y + 2z}\right) = 0$$

dır.

ÖRNEK 4. $(y-z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(z-x)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x-y)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$ kısmi türevli denklemini çözünüz.

Denklemin yardımcı sistemi

$$du = 0$$

$$\frac{dx}{y-z}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{x-y}$$

olup bunlardan

$$u = c_1$$

ve ÖRNEK 2. deki gibi

$$x+y+z=c_2$$

$$x^2+y^2+z^2=c_3$$

asal integralleri bulunur. Bunlara göre verilen denklemin genel çözümü

$$F(u\ ,\ x+y+z\ ,\ x^2+y^2+z^2)=0$$

dır.

ÖRNEK 5. $(x^2-y^2-z^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xz$ kısmi türevli denklemini çözünüz.

Denklemin yardımcı sistemi

$$\frac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{2xz}$$

olup buradan

$$\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{2xz}\ \rightarrow\ \frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

$$\log y=\log c_1 z\ \rightarrow\ \frac{y}{z}=c_1$$

ve

$$\frac{dz}{2xz}=\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{x(x^2-y^2-z^2)+2xy^2+2xz^2}=\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{x(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{2(x\,dx + y\,dy + z\,dz)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\log c_2 z = \log(x^2 + y^2 + z^2) \rightarrow \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} = c_2$$

asal integralleri bulunur. Verilen kısmi türevli denklemin genel çözümü ise,

$$F\left(\frac{y}{z}, \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}\right) = 0$$

dır.

ÖRNEK 6. $(7x + y)\frac{\partial z}{\partial x} + (8x + 5y)\frac{\partial z}{\partial y} = 1$ kısmi türevli denklemini çözünüz.

Denklemin yardımcı sistemi

$$\frac{dx}{7x + y} = \frac{dy}{8x + 5y} = \frac{dz}{1}$$

olup buradan

$$\frac{dx}{dz} = 7x + y \quad \text{ve} \quad \frac{dy}{dz} = 8x + 5y$$

sistemi elde edilir. Birinci denklem z e göre türetilirse

$$\frac{d^2x}{dz^2} = 7\frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} = 7\frac{dx}{dz} + 8x + 5\left(\frac{dx}{dz} - 7x\right)$$

veya

$$\frac{d^2x}{dz^2} - 12\frac{dx}{dz} + 27x = 0$$

elde edilir. Sabit katsayılı lineer ve homojen olan bu denklemin genel çözümü,

$$x = c_1 e^{9z} + c_2 e^{3z}$$

dir. x in bu ifadesini birinci denklemde yerine koyarsak

$$y = 2c_1 e^{9z} + c_2 e^{3z}$$

elde edilir. x ve y nin bu ifadelerinden de

$$c_1 = \frac{4x + y}{6} e^{-9z}$$

$$c_2 = \frac{2x - y}{6} e^{-3z}$$

asal integralleri ve bunlardan da verilen kısmi türevli denklemin genel çözümü olarak,

$$F\left(\frac{4x + y}{6} e^{-9z} \quad , \quad \frac{2x - y}{6} e^{-3z}\right) = 0$$

bulunur.

ÖRNEK 7. $y \dfrac{\partial z}{\partial x} - x \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$ kısmi türevli denklemini çözünüz.

Denklemin yardımcı sistemi

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{1}$$

olup buradan

$$x\,dx + y\,dy = 0 \;\rightarrow\; x^2 + y^2 = c_1$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y}$$

elde edilir. $x^2 + y^2 = c_1$ den $y = \pm\sqrt{c_1 - x^2}$ olup

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\pm\sqrt{c_1 - x^2}}$$

$$z = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{c_1 - x^2}} = \pm \arcsin \frac{x}{\sqrt{c_1}} + c_2$$

$$z = \pm \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + c_2$$

bulunur. Buna göre verilen denklemin genel çözümü

$$F\left(z \pm \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ;\ x^2+y^2\right)=0$$

dır.

22.4 İkinci mertebeden lineer ve sabit katsayılı kısmi türevli denklemler.

22. 4 - 1. Denklemin, hiperbolik, parabolik ve eliptik şekillere dönüştürülmesi.

Bu bölümde

$$\boxed{A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0} \tag{1}$$

şeklindeki bir kısmi türevli denklemin çözümünü inceliyeceğiz. Burada $z=f(x,y)$ iki değişkenli bir fonksiyon ve A, B, C ler de hepsi sıfır olmayan reel sabitlerdir. Bu takdirde yukarıdaki denklem "*ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer ve homojen*" bir kısmi türevli denklemdir. Bu denklemde

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=s \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t$$

yapılırsa denklem,

$$Ar+2Bs+Ct=0$$

şeklini alır.

Bu denklemi çözmek için, α ve β iki reel sayı ve $\alpha \neq \beta$ olarak

$$u=x+\alpha y$$
$$v=x+\beta y$$

dönüştürmelerini yapalım. Bu takdirde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \alpha\frac{\partial z}{\partial u} + \beta\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (\alpha + \beta)\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + \beta\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \alpha^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + \beta^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

olup denklemde yerlerine konursa

$$(A + 2B\alpha + C\alpha^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2[A + B(\alpha + \beta) + C\alpha\beta]\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + (A + 2B\beta + C\beta^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0 \qquad (2)$$

elde edilir. Bu ise sabit katsayılı lineer ve homojen bir kısmi türevli denklem yani, aynı tipten bir denklemdir. Bu denklemdeki α ve β keyfi sabitlerini, denklemin basit bir hale gelmesini temin edecek şekilde seçebiliriz. $C \neq 0$ farzediyoruz.

1) $AC - B^2 < 0$ ise

$$A + 2B\xi + C\xi^2 = 0$$

denklemi iki farklı reel köke malik olur. α ve β değerlerini, bu denklemin kökleri olarak seçersek (2) denklemi

$$[A + B(\alpha + \beta) + C\alpha\beta]\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = 0$$

şekline girer. Diğer taraftan

$$\alpha + \beta = -\frac{2B}{C} \quad ; \quad \alpha\beta = \frac{A}{C}$$

olarak

$$A + B(\alpha + \beta) + C\alpha\beta = A - \frac{2B^2}{C} + A$$

$$= 2A - \frac{2B^2}{C}$$

$$= \frac{2}{C}(AC - B^2) \neq 0$$

olacaktır. Bu da bizi, (2) denkleminin

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial u \, \partial v} = 0} \tag{3}$$

denklemine denk olduğu sonucuna götürür. (*Hiperbolik tip denklem*)

2) $AC - B^2 = 0$ ise

$$A + 2B\xi + C\xi^2 = 0$$

denklemi iki katlı $-\frac{B}{C}$ köküne malik olur. Bu takdirde $\alpha = -\frac{B}{C}$ ve β herhangibir sayı olarak seçilirse, (2) denklemindeki

$$A + 2B\alpha + C\alpha^2 = 0$$

ve

$$A + B(\alpha + \beta) + C\alpha\beta = A + B\left(-\frac{B}{C} + \beta\right) - B\beta$$

$$= A - \frac{B^2}{C} + B\beta - B\beta$$

$$= \frac{AC - B^2}{C} = 0$$

olacaktır. Bu takdirde $\beta \neq \alpha$ olarak

$$A + 2B\beta + C\beta^2$$

ifadesi sıfırdan farklı olacak ve (2) denklemi

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0} \tag{4}$$

denklemine denk olacaktır. (*Parabolik tip denklem*).

3) $AC - B^2 > 0$ ise

$$A + 2B\xi + C\xi^2 = 0$$

denklemi reel köklere malik değildir. Bu halde α ve β yı (2) denklemindeki $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ ve $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ nin katsayılarının sıfır olmasını sağlıyacak şekilde seçemeyiz. Ancak, α ve β yı $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ ile $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ nin katsayıları eşit ve $\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v}$ nin katsayısı sıfır olacak şekilde seçebiliriz. Bu takdirde α ve β

$$A + 2B\alpha + C\alpha^2 = A + 2B\beta + C\beta^2$$

$$A + B(\alpha + \beta) + C\alpha\beta = 0$$

şartlarını gerçekleştirmelidir. Birinci denklem

$$(\alpha - \beta)\,[2B + C(\alpha + \beta)] = 0$$

şekline sokulabilir. $\alpha \neq \beta$ olup buradan,

$$\alpha + \beta = -\frac{2B}{C}$$

ve ikinciden

$$\alpha\beta = -\frac{AC - 2B^2}{C^2}$$

bulunur. Bunlara göre α ve β,

$$\lambda^2 + \frac{2B}{C}\lambda - \frac{AC - 2B^2}{C^2} = 0$$

ikinci derece denkleminin kökleri olur. Bu denklemin diskriminantı

$$\Delta = \frac{AC - B^2}{C^2}$$

olup, $AC - B^2 > 0$ şartından ötürü, pozitifdir. O halde istenilen şartları sağlayacak α ve β sayıları mevcuttur. Bu takdirde, $AC - B^2 > 0$ olduğundan

$$A + 2B\alpha + C\alpha^2 \neq 0$$

olacak ve (1) denklemi

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0} \qquad (5)$$

şekline dönüştürülmüş olacaktır. (*Eliptik tip denklem*)

Bu incelemeyi $C \neq 0$ kabul ederek yaptık ve (3), (4) denklemlerini elde ettik. (5) denkleminin çıkarılışında $C \neq 0$ olma şartı, $AC - B^2 < 0$ şartı içersinde mevcuttur. $C = 0$, $A \neq 0$ halinde x ve y ye yer değiştirmek suretile aynı işlem yapılır. $A = C = 0$ halinde $B \neq 0$ olarak (3) denklemine varılır.

Şimdi de bütün bu halleri bir teorem halinde ifade edelim.

TEOREM. $A \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + C \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ *kısmi türevli denklemi,*

$$u = x + \alpha y \quad , \quad v = x + \beta y$$

dönüştürmeleri ile aşağıdaki denklemlere dönüştürülür :

$AC - B^2 < 0$ ise $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} = 0$ *(hiperbolik tip)*

$AC - B^2 = 0$ ise $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$ *(parabolik tip)*

$AC - B^2 > 0$ ise $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$ *(eliptik tip)*

22. 4 - 2. Hiporbolik, parabolik, eliptik denklemlerin çözümü.

1) Hiperbolik tip denklemin çözümü.

Bu tip denklemin çözümünü 22.2, ÖRNEK 3. de göstermiştik.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \, \partial v} = 0$$

denkleminin her iki tarafının v ye göre integrali alınırsa,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f(u)$$

ve bu denklemin her iki tarafının da u ya göre integrali alınırsa,

$$z = \int f(u) \, du + G(v)$$

$$z = F(u) + G(v)$$

bulunur. O halde (1) denkleminin çözümü

$$z = F(x + \alpha y) + G(x + \beta y)$$

dir. F ve G keyfi fonksiyonlardır.

2) Parabolik tip denklemin çözümü.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$$

denkleminin her iki tarafının v ye göre ard arda iki defa integrali alınırsa

$$\frac{\partial z}{\partial v} = F(u)$$

$$z = v\,F(u) + G(u)$$

bulunur. O halde (1) denkleminin çözümü

$$z = (x + \beta y) F(x + \alpha y) + G(x + \alpha y)$$

dir.

3) Eliptik tip denklemin çözümü.

Eliptik denklem

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$$

olup bu denklem *Laplace denklemi* adını alır. Bu denklemi sağlıyan $z(u, v)$ fonksiyonlarına *harmonik fonksiyonlar* denir. Bu denklemin çözümü için iki yol vereceğiz.

1. yol.

$$u + i v = X \qquad ; \qquad u - i v = Y$$

dönüştürmelerini yapalım. Bu takdirde

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial X}\,\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial Y}\,\frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial X} + \frac{\partial z}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial X^2}\,\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial X\,\partial Y}\,\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial Y\,\partial X}\,\frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}\,\frac{\partial Y}{\partial u}$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial X\,\partial Y} + \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = i\left(\frac{\partial z}{\partial X} - \frac{\partial z}{\partial Y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = i\left[\frac{\partial^2 z}{\partial X^2}\,i - \frac{\partial^2 z}{\partial X\,\partial Y}\,i + \frac{\partial^2 z}{\partial Y\,\partial X}(-i) - \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}(-i)\right]$$

$$= -\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial X\,\partial Y} - \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}$$

olarak denklem

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 4\,\frac{\partial^2 z}{\partial X\,\partial Y} = 0$$

veya

$$\frac{\partial^2 z}{\partial X' \partial Y} = 0$$

şeklini alır. Bu denklem ise hiperbolik tip olup, çözülürse

$$z = F(X) + G(Y)$$

ve Laplace denkleminin çözümü olarak ta

$$z = F(u + iv) + G(u - iv)$$

elde edilir.

2. yol.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$$

denkleminin çözümü $z = f(u, v)$ şeklindedir. $X = X(u)$, $Y = Y(v)$ olarak

$$z = XY = X(u) . Y(v)$$

şeklinde bir çözüm arayalım. (değişkenlere ayırma kuralı)

$$\frac{\partial z}{\partial u} = Y \frac{dX}{du} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = X \frac{dY}{dv}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = Y \frac{d^2X}{du^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = X \frac{d^2Y}{dv^2}$$

olup $z = XY$ nin denklemi sağlama şartı,

$$Y \frac{d^2X}{du^2} + X \frac{d^2Y}{dv^2} = 0$$

dır. Denklemin her iki tarafını XY çarpımına bölelim. Bu takdirde

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{du^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dv^2} = 0$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{du^2} = - \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dv^2}$$

elde edilir. $X = X(u)$ ve $Y = Y(v)$ olduğundan son denklemin birinci tarafı v yi ve ikinci tarafı da u yu içermemektedir. O halde birbirine eşit olan bu iki ifade bir sabite eşit olmak durumundadır. O halde K^2 bir sabit olarak,

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{du^2} = K^2 \quad \text{veya} \quad \frac{d^2X}{du^2} - K^2X = 0$$

$$-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dv^2} = K^2 \quad \text{veya} \quad \frac{d^2Y}{dv^2} + K^2Y = 0$$

denklemlerine varılır. Bunlardan ise

$$X = c_1 e^{Kx} + c_2 e^{-Kx}$$

$$Y = a \cos Ky + b \sin Ky$$

bulunur. O halde denklemin z çözümü

$$z = X\,Y = (c_1 e^{Kx} + c_2 e^{-Kx})(a \cos Ky + b \sin Ky)$$

dir. Bu çözümden

$$z = P e^{Kx} \sin Ky \quad , \quad z = R e^{-Kx} \sin Ky$$

$$z = M e^{Kx} \cos Ky \quad , \quad z = N e^{-Kx} \cos Ky$$

özel çözümleri de kolayca çıkarılabilir.

ÖRNEK 1. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ kısmi türevli denklemini çözünüz.

$A + 2B\xi + C\xi^2 = 0$ denklemi $1 + 2\xi - 3\xi^2 = 0$ şeklinde olup kökleri $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{3}$ dür. Buna göre genel çözüm

$$z = F(x + y) + G\left(x - \frac{1}{3}y\right)$$

dir.

ÖRNEK 2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x - y$ kısmi türevli denklemini çözünüz.

$u = x - y \;,\; v = x + y$ değişken dönüştürmesi yapılırsa

$$4 \frac{\partial^2 z}{\partial u \, \partial v} = u$$

denklemine vapılır. Bu denklemin genel çözümü ise

$$4 \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u^2}{2} + F(v)$$

$$z = \frac{u^2 v}{8} + \frac{1}{4} \int F(v) \, dv + G(u)$$

$$z = \frac{u^2 v}{8} + H(v) + G(u)$$

olup verilen denklemin genel çözümü

$$z = \frac{(x-y)^2 (x+y)}{8} + H(x+y) + G(x-y)$$

dir.

ÖRNEK 3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ kısmi türevli denklemini zünüz.

$u = x + y \;,\; v = y$ dönüştürmeleri yapılırsa

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \, \partial v} - 2 \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

denklemine varılır. Burada da $\frac{\partial z}{\partial u} = p$ dönüştürmesi yapılırsa denklem

$$\frac{\partial p}{\partial v} - 2p = 0$$

şeklini alır. Buradan ise

$$\log p - 2v = \log f(u)$$

$$p = e^{2y} f(u)$$

ve

$$z = e^{2y} F(u) + G(v)$$

elde edilir. Buna göre verilen denklemin genel çözümü

$$z = e^{2y} F(x + y) + G(y)$$

dir.

ÖRNEK 4. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 z = e^x$ kısmi türevli denklemini çözünüz.

Bu denklem, y parametre kabul edilirse lineer bir denklem olur. Yani

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + y^2 z = e^x$$

denklemine benzer. Buna göre çözülürse

$$z = F(y) \cos xy + G(y) \sin xy + \frac{e^x}{1 + y^2}$$

elde edilir.

22. BÖLÜME AİT PROBLEMLER.

Aşağıdaki kısmi türevli denklemleri çözünüz.

1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 z$

2) $x \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a \dfrac{\partial z}{\partial x}$

3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$

4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 5 \dfrac{\partial z}{\partial x} + 6z = 0$

5) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 4 \dfrac{\partial z}{\partial y} + 5z = 0$

6) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xy$

7) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^2 + y^2$

8) $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$

9) $x \dfrac{\partial z}{\partial y} - y \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$

10) $2zx \dfrac{\partial z}{\partial x} + 2zy \dfrac{\partial z}{\partial y} = z^2$

11) $(z + x) \dfrac{\partial z}{\partial y} - (z + y) \dfrac{\partial z}{\partial x} = y - x$

12) $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \dfrac{\partial z}{\partial y} = z$

13) $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$

14) $xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = xy$

15) $yz \frac{\partial z}{\partial x} + zx \frac{\partial z}{\partial y} = xy$

16) $y \frac{\partial z}{\partial x} + (x + z) \frac{\partial z}{\partial y} = y$

17) $y^2 z \frac{\partial z}{\partial x} - x^2 z \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y$ Cevap. $F(y^2 + z^2, x^3 + y^3) = 0$

18) $x(y^2 - z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + y(z^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial y} = z(x^2 - y^2)$

Cevap. $F(xyz; x^2 + y^2 + z^2) = 0$

19) $y \frac{\partial z}{\partial y} - x \frac{\partial z}{\partial x} = z$ Cevap. $F(xy, xz) = 0$

20) $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} + x^2 - y^2 = 0$ Cevap. $F(x^2 + y^2, xy - z) = 0$

21) $x(y - z) \frac{\partial z}{\partial x} + y(z - x) \frac{\partial z}{\partial y} = z(x - y)$

Cevap. $F(xyz, x + y + z) = 0$

22) $yz \frac{\partial z}{\partial x} - xz \frac{\partial z}{\partial y} = xy$ Cevap. $F(x^2 + y^2, y^2 + z^2) = 0$

23) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z$ Cevap. $F\left(x - y, \frac{z}{e^x}\right)$

24) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ Cevap. $z = x f(x - y) + g(x - y)$

25) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ Cevap. $z = f(3x + y) + g(x - y)$

26) $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ Cevap. $\varphi = f(x + y + i x) + g(x + y - i x)$

27) $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0$ Cevap. $\varphi = f(x + y) + g(y)$

28) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 8 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 15 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ Cevap. $z = F(y + 3x) + G(y + 5x)$

29) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ Cevap. $z = F[y + x(1 + \sqrt{2})] + G[y + x(1 - \sqrt{2})]$

30) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ Cevap. $z = F(y + 2x) + x G(y + 2x)$

23. BÖLÜM

KATLI İNTEGRALLER

23.1 İki katlı integral.

23. 1 - 1. İki katlı integralin tanımı.

xoy düzleminde C eğrisi ile sınırlanmış kapalı bir D bölgesi ve bu bölgede tanımlı ve sürekli olan bir $z = f(x, y)$ fonksiyonu gözönüne alalım.

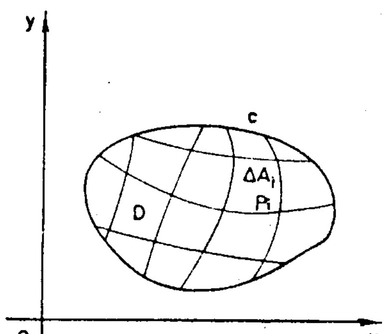
D bölgesini herhangi eğrilerle

$$\Delta A_1 , \Delta A_2 , \dots , \Delta A_n$$

gibi n kısmi bölgeye ayıralım. Yazışı karıştırmamak için bu kısmi bölgelerin alanlarını da

$$\Delta A_1 , \Delta A_2 , \dots , \Delta A_n$$

lerle gösterelim. Şekil 208.



Şekil 208

Bundan sonra, kısmi bölgelerin herbirinin içinde, keyfi birer nokta seçelim. Bunlar

$$P_1 , P_2 , \dots , P_i , \dots , P_n$$

ve $z = f(x,y)$ fonksiyonlarının, bu noktalardaki değerleri de,

$$f(P_1)\ ,\ f(P_2)\ ,\ \dots\ ,\ f(P_i)\ ,\ \dots\ ,\ f(P_n)$$

olsun. Şimdi de, $f(P_i)\,\Delta A_i$ çarpımlarını ve sonra da bu çarpımların

$$f(P_1)\,\Delta A_1 + f(P_2)\,\Delta A_2 + \dots + f(P_n)\,\Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta A_i \qquad (1)$$

toplamını oluşturalım.

Eğer, D bölgesinde $f(x,y) \geq 0$ ise, bu toplamın herbir terimi, geometrik olarak, tabanı ΔA_i ve yüksekliği $f(P_i)$ olan bir silindir elemanın hacmını verir. Buna göre,

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta A_i$$

toplamı da, bu şekildeki silindir elemanlarının hacımları toplamıdır. Şekil 209.

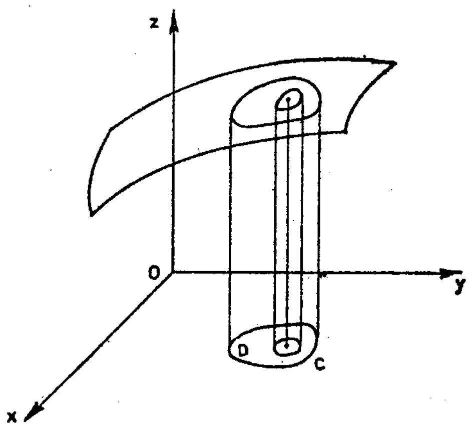
Şimdi bu toplamın, ΔA_i alanlarının herbirinin sıfıra yaklaşması şartile, $n \to \infty$ halindeki limitini düşünelim. $z = f(x,y)$ fonksiyonu, D bölgesinde sürekli ise, bu limit mevcuttur ve $f(x,y)$ ***fonksiyonunun*** D ***bölgesindeki, iki katlı integrali adını*** alır ve işaretle

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta A_i = \iint_D f(x,y)\,dA}$$

şeklinde gösterilir.

Bu limit, D bölgesinin kısmi bölgelere bölünüş şekline ve P_i noktasının ΔA_i içindeki seçiliş şekline bağlı değildir.

Eğer, D bölgesi, *ox, oy* eksenlerine paralel doğrularla kısmi bölgelere bölünürse, kısmi bölgeler birer dikdörtgen olarak, alanları



Şekil 209

$$\Delta A_i = \Delta x_j \, \Delta y_k$$

ve limit de

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \Delta A_i = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy}$$

olacaktır. D bölgesine, *integrasyon bölgesi* denir.

İHTAR. $f(x, y)$ fonksiyonu D bölgesinde pozitifse, $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ iki katlı integrali, D bölgesinin çevresi üzerinde oz eksenine paralel kalarak hareket eden bir doğrunun meydana getirdiği silindir ile $z = 0$ düzlemi ve $z = f(x, y)$ yüzeyinin sınırladıkları hacma eşittir.

23. 1 - 2. İki katlı integralin hesabı.

Verilmiş olan D bölgesi, oy eksenine paralel ve bölgenin bir iç noktasından geçen bir doğru tarafından N_1 ve N_2 gibi iki noktada kesiliyorsa, bu bölgeye oy eksenine göre *düzgün bölge* denir. Aynı şekilde, ox eksenine göre düzgün bölge tanımlanabilir. Koordinat eksenlerinin her ikisine göre düzgün olan bölgeye, kısaca *düzgün bölge* denir.

D gibi düzgün bir bölgenin $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ eğrileri ve $x = a$, $x = b$ doğruları ile sınırlanmış olduğunu farzedelim. Bundan başka

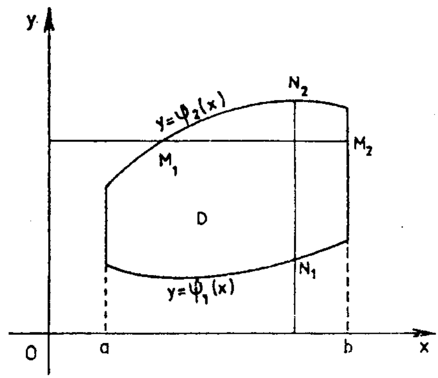
$$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \qquad ; \qquad a < b$$

olsun. Şekil 210.

Şimdi 23.1-1. deki ihtarda açıklanan ve değeri

$$V = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

olan hacmı, D bölgesini eksenlere paralel doğrularla, kısmi bölgelere ayırmak suretile, yaklaşık olarak hesaplamak isteyelim.



Şekil 210

$M(x, y, 0)$, D bölgesinin bir noktası ve $P[x, y, f(x, y)]$ de $z = f(x, y)$ yüzeyi üzerinde bulunan ve xoy düzlemindeki işdüşümü M olan, bir nokta olsun.

$z = f(x\ y)$ yüzeyi, D bölgesi ve bu bölgenin çevresi üzerinde oz eksenine paralel kalarak hareket eden doğrunun meydana getirdiği silindirik cismin sınırladıkları hacmı, yoz ve zox düzlemlerine paralel düzlemlerle kısmi hacımlara bölelim. D bölgesinde, M noktasını içeren dik dörtgen bölgenin kenarları Δx ve Δy olsun. Bu dik dörtgeni taban kabul eden prizmatik cismin hacmının yaklaşık değeri (Şekil 211)

$$z\,\Delta x\,\Delta y = f(x\,,y)\,\Delta x\,\Delta y$$

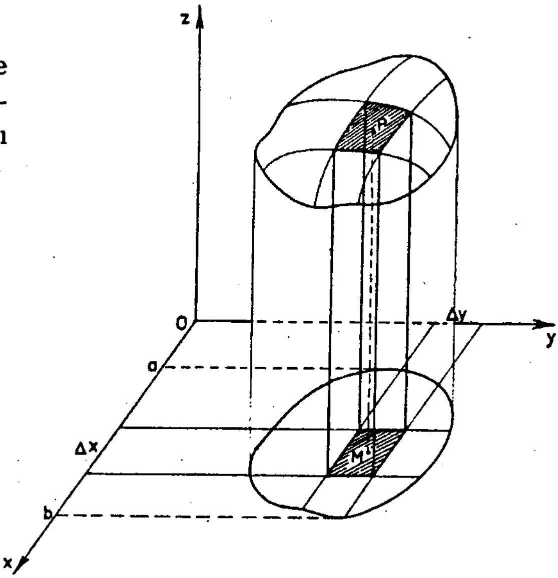
dir. Kenarları yoz düzlemine paralel bir şerit içindeki prizmatik cisimlerin hacımlarını toplarsak

$$\Sigma f(x\,,y)\,\Delta x\,\Delta y = \Delta x\,\Sigma f(x\,,y)\,\Delta y$$

elde ederiz. İkinci tarafta Δx in katsayısı olan $\Sigma f(x, y)\,\Delta y$ ifadesi

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x\,,y)\,dy$$

intègralinin yaklaşık bir değeridir. O halde gözönüne alınan şeridin hacmının yaklaşık değeri,



Şekil 211

$$\Delta x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x\,,y)\,dy = \Delta x\,.\,F(x)$$

dir. Bu şekildeki şeritlerin hacımları toplamı ise,

$$\sum F(x)\,\Delta x$$

dir. Bu son toplam ise

$$\int_a^b F(x)\,dx$$

integralinin bir yaklaşık değeridir. Sonuç olarak,

$$\sum\sum f(x, y)\,\Delta x\,\Delta y$$

iki kat toplamı da

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx$$

ardışık integralinin bir yaklaşık değeridir. Buna göre sözü geçen cismin hacmı,

$$V = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx$$

dir. Diğer taraftan bu hacım, $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$ iki katlı integrali ile tanımlanmış olduğuna göre,

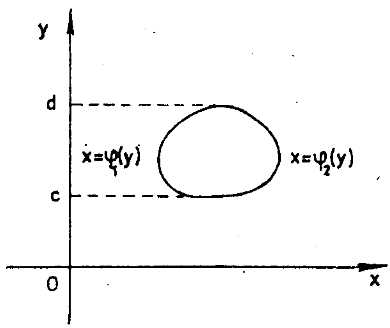
$$\boxed{\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx}$$

olduğu gösterilmiş olur.

İHTAR. D bölgesi $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ eğrileri ve $y = c$, $y = d$ doğrularının sınırlamış olduğu bölge olarak, evvelâ zox düzlemine paralel bir şerit içindeki prizmatik cisimlerin hacımları toplamını hesaplamak suretile, işlem yapılsa idi,

$$\boxed{\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx \right) dy}$$

bulunurdu. Şekil 212.



Şekil 212

İkinci taraftaki integral ardışık integral adını alır. Bu integralin hesabı, evvelâ parantez içindeki integral, sonra da ikinci integral hesaplanmak suretile yapılır.

ÖRNEK 1. $\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x^2 y\,dy \right) dx$

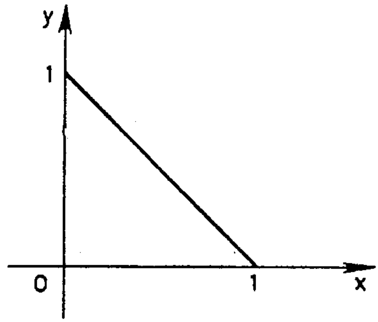
integralini hesaplayınız.

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x^2 y \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} y \, dy \right) x^2 \, dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - 2x + x^2) \, x^2 \, dx$$
$$= \frac{1}{2} \left| \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right|_0^1 = \frac{1}{60}$$

ÖRNEK 2. D bölgesi $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ doğrularının sınırladığı üçgen bölge olduğuna göre

$$\iint_D xy \, dx \, dy$$

integralini hesaplayınız.



Şekil 213

$$\iint_D xy \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy \, dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} xy \, dx \right) dy = \frac{1}{24}$$

ÖRNEK 2 den de görüldüğü gibi iki katlı integral, iki şekilden biri kullanılmak suretile, hesaplanır. D bölgesinin şekline veya integrali alınacak fonksiyona göre bu sıralardan biri seçilir.

ÖRNEK 3. $\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \right) dx$ integralinde, integral alma sırasını değiştiriniz.

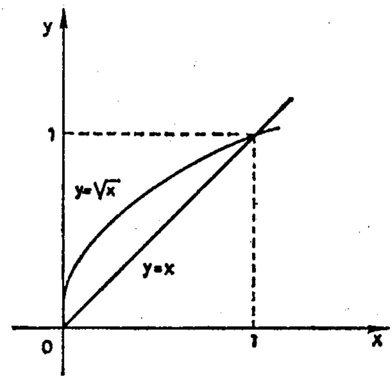
İntegrasyon bölgesi $y = x$, $y = \sqrt{x}$ eğrileri ile sınırlanmıştır. Şekil 214. ox e paralel bir doğru bölgenin çevresini iki noktada keser. O halde

$$\psi_1(y) = y^2 \quad , \quad \psi_2(y) = y$$
$$0 \leq y \leq 1$$

olarak evvelâ x e göre integral alma düşünülürse

$$\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y} f(x,y) \, dx \right) dy$$

olur.



Şekil 214

ÖRNEK 4. $\int_0^1 \left(\int_x^1 x \cos y^3 \, dy \right) dx$ integralini hesaplayınız.

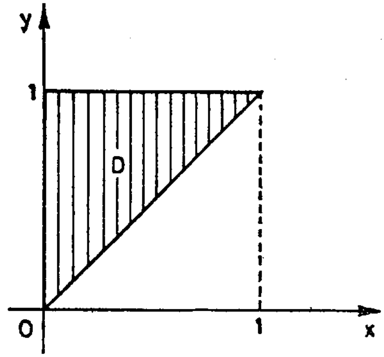
$\int x \cos y^3 \, dy$ integrali hesaplanamaz. O halde integral sırasını değiştirmeyi denemek gerekir. D bölgesi $y = x$, $y = 1$, $x = 0$ doğrularının sınırladığı bölgedir. Şekil 215.

Buna göre

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 x \cos y^3 dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^y x \cos y^3 \, dx \right) dy$$

$$= \frac{1}{6} \sin 1$$

dir.



Şekil 215

ÖRNEK 5. $\int_0^1 \left(\int_x^1 e^{y^2} \, dy \right) dx$

integralini hesaplayınız.

$\int e^{y^2} dy$ integrali hesaplanamaz. O halde integral sırasını değiştirmeyi denemek gerekir. D bölgesi $y = x$, $y = 1$, $x = 0$ doğrularının sınırladığı bölge olup (Şekil 215),

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 e^{y^2} \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2} \, dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left| x \, e^{y^2} \right|_0^y dy$$

$$= \int_0^1 y \, e^{y^2} \, dy = \left| \frac{1}{2} \, e^{y^2} \right|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} (e - 1)$$

dir.

23.1 - 3. İki katlı integralin özelikleri.

TEOREM 1. $f_1(x, y) + f_2(x, y)$ *şeklinde iki fonksiyonun toplamının bir* D *bölgesindeki iki katlı integrali, bu fonksiyonların herbirinin* D *bölgesindeki iki katlı integrallerinin toplamına eşittir. Yani*

$$\iint_D [f_1(x,y) + f_2(x,y)]\,dx\,dy = \iint_D f_1(x,y)\,dx\,dy + \iint_D f_2(x,y)\,dx\,dy$$

dır.

TEOREM 2. İki katlı integral işareti altında bulunan sabit bir çarpan, integral işaretleri dışına çıkarılabilir. Yani a *sabit bir sayı olarak*

$$\iint_D a\,f(x,y)\,dx\,dy = a\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

dir.

TEOREM 3. D *bölgesi,* D_1 *ve* D_2 *gibi iki düzgün bölgeden meydana gelmişse*

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

veya daha genel olarak

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \ldots\ldots + \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$$

dir.

Örneğin Şekil 216 daki düzgün olmayan D domeni, D_1, D_2, D_3 düzgün domenlerine ayrılabilir. Bu takdirde

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_3} f(x,y)\,dx\,dy$$

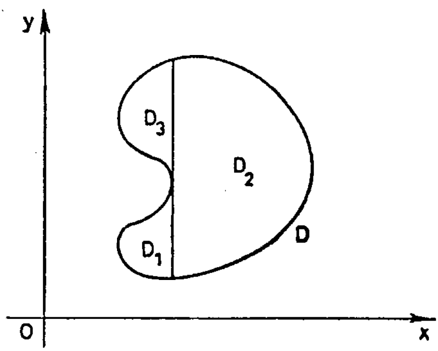
dir.

TEOREM 4. m *ve* M, $f(x,y)$ *fonksiyonunun* D *bölgesindeki en küçük ve en büyük değerleri ve* A *da* D *bölgesinin alanı ise*

$$mA \leqq \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leqq MA$$

dır.

İspat. D *bölgesi* $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ eğrileri ile $x = a$, $x = b$ doğrularının sınırladığı bölge olsun. Bu takdirde



Şekil 216

$$I_D = \iint\limits_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

dir.

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \leqq \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} M\,\mathrm{d}y = M\,[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]$$

olup

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \leqq \int_a^b M\,[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\,\mathrm{d}x = MA$$

yani

$$I_D \leqq MA$$

dır. Aynı şekilde

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \geqq \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} m\,\mathrm{d}y = m\,[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]$$

olup

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \geqq \int_a^b m\,[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\,\mathrm{d}x = mA$$

yani

$$I_D \geqq mA$$

dir. Bunlara göre de

$$mA \leqq I_D \leqq MA$$

olarak teorem ispatlanmış olur.

TEOREM 5. Sürekli bir $f(x, y)$ fonksiyonunun bir D bölgesindeki iki katlı integrali, bölgenin A alanı ile fonksiyonun, bölgenin bir P noktasındaki değeri çarpımına eşittir, yani

$$\boxed{\iint\limits_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = f(P)\,.\,A}$$

dır.

İspat. TEOREM 4 e göre

$$mA \leqq \iint_D f(x, y)\, dx\, dy \leqq MA$$

$$m \leqq \frac{1}{A} \iint_D f(x, y)\, dx\, dy \leqq M$$

yazılabilir. $\frac{1}{A} \iint_D f(x, y)\, dx\, dy$, nin değeri, $f(x, y)$ fonksiyonunun D bölgesindeki en küçük ve en büyük değerleri arasında kalmaktadır. $f(x, y)$ fonksiyonu D bölgesinde sürekli olduğuna göre, D bölgesinde, bu fonksiyonun değerini

$$\frac{1}{A} \iint_D f(x, y)\, dx\, dy$$

ye eşit kılan bir P noktası bulunabilir. O halde

$$\frac{1}{A} \iint_D f(x, y)\, dx\, dy = f(P)$$

veya

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = A \,.\, f(P)$$

olarak teorem ispatlanmış olur. $f(P)$ değeri, $f(x, y)$ fonksiyonunun D bölgesindeki *ortalama değeri*'dir. O halde

$$\boxed{\textit{ortalama değer} = f(P) = \frac{1}{A} \iint_D f(x, y)\, dx\, dy}$$

dir.

ÖRNEK 1. $\iint_D (x - y)\, dx\, dy$ integralini $x + y = 3$, $x^2 = 4y$, $y^2 = 4x$ ve $y = 3$ eğrilerinin birinci bölgede sınırladıkları D bölgesinde hesaplayınız.

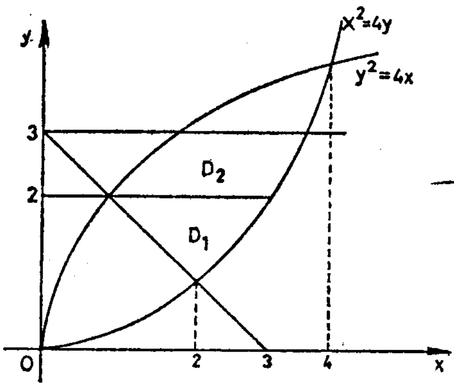
İntegrasyon bölgesi Şekil 217 de gösterilmiş olup integrali kolayca hesaplıyabilmek için D bölgesini D_1, D_2 kısmi bölgelerine ayırmak gerekir. Buna göre

$$\iint_D (x - y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} (x - y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} (x - y)\,dx\,dy$$

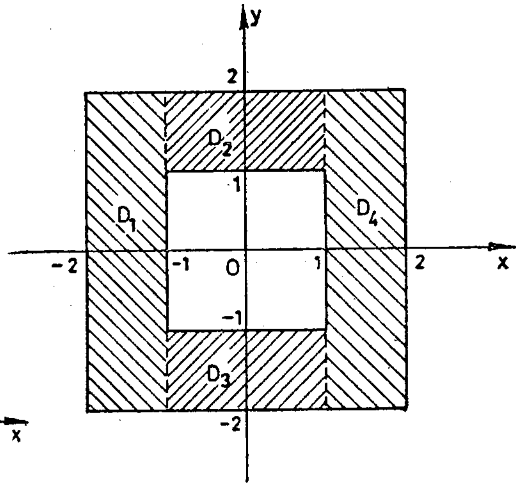
$$= \int_1^2 \left(\int_{3-y}^{2\sqrt{y}} (x - y)\,dx \right) dy + \int_2^3 \left(\int_{y^2/4}^{2\sqrt{y}} (x - y)\,dx \right) dy$$

$$= \frac{2007}{160} - \frac{36\sqrt{3}}{5}$$

dir.



Şekil 217



Şekil 218

ÖRNEK 2. D bölgesi, merkezi orijin, kenarları, koordinat eksenlerine paralel ve uzunlukları 2 ve 4 birime eşit olan, iki kare arasındaki bölge olduğuna göre (Şekil 218)

$$\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy$$

integralini hesaplayınız.

D bölgesi düzgün olmayıp $x = -1$, $x = 1$ doğruları ile D_1, D_2, D_3, D_4 gibi dört düzgün bölgeye ayrılabilir. Buna göre

$$\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3} + \iint_{D_4}$$

$$= \int_{-2}^{-1}\left(\int_{-2}^{2} e^{x+y}\, dy\right) dx + \int_{-1}^{+1}\left(\int_{1}^{2} e^{x+y}\, dy\right) dx + \int_{-1}^{+1}\left(\int_{-2}^{-1} e^{x+y}\, dy\right) dx$$

$$+ \int_{1}^{2}\left(\int_{-2}^{+2} e^{x+y}\, dy\right) dx$$

$$= (e^2 - e^{-2})(e^{-1} - e^{-2}) + (e^2 - e)(e - e^{-1}) + (e^{-1} - e^{-2})(e - e^{-1}) +$$

$$(e^2 - e^{-2})(e^2 - e)$$

$$= e^{-4} - e^2 - e^{-2} + e^4 = 2\,\mathrm{ch}\,4 - 2\,\mathrm{ch}\,2 = 4\,\mathrm{sh}\,3\ \mathrm{sh}\,1$$

dir.

İHTAR 1. İki katlı integrallerin hesabındaki parantezler kaldırılabilir. Buna göre

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\right) dx = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy$$

yazılabilir.

İHTAR 2. D bölgesi $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ doğrularının oluşturduğu bir *dik dörtgen bölge* ise

$$\boxed{\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy}$$

dir.

İHTAR 3. Özel olarak $f(x, y) \equiv F(x) . G(y)$ şeklinde ve D bölgesi İHTAR 2 deki dik dörtgen bölge ise

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy$$

$$= \int_a^b dx \int_c^d F(x)\, G(y)\, dy$$

$$= \int_a^b F(x)\, dx \int_c^d G(y)\, dy$$

$$= \left(\int_a^b F(x)\, dx\right)\left(\int_c^d G(y)\, dy\right)$$

dir.

ÖRNEK 3. $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2\,dy}{1+y^2}$ integralini hesaplayınız.

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2\,dy}{1+y^2} = \left(\int_0^1 x^2\,dx\right)\left(\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}\right) = \frac{\pi}{12}$$

23.1 - 4. İki katlı integrallerin hacım hesabına uygulanması.

İki katlı integralin tarımında da belirttiğimiz gibi, D bölgesinin çevresi üzerinde, oz eksenine paralel kalarak hareket eden bir doğrunun meydana getirdiği silindirin $z = f(x, y)$ yüzeyi ve $z = 0$ düzlemi ile sınırladığı cismin hacmı, $f(x, y)$ nin D bölgesindeki iki katlı integraline, yani

$$\boxed{V = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy}$$

ye eşittir.

Hacmı hesaplanacak cisim eğer, üstten $z = \phi_2(x, y) \geq 0$ ve alttan $z = \phi_1(x, y) \geqslant 0$ yüzeyleri ile sınırlanmış ise, her iki yüzeyin xoy düzlemindeki işdüşümü aynı D bölgesi olarak, cismin hacmı, tabanı D bölgesi ve üstten $z = \phi_2(x, y)$ yüzeyi ile sınırlanan cismin hacmından, tabanı D bölgesi ve üstten $z = \phi_1(x, y)$ ile sınırlanan cismin hacmını çıkarmak suretile elde edilir. Buna göre

$$V = \iint_D \phi_2(x, y)\,dx\,dy - \iint_D \phi_1(x, y)\,dx\,dy$$

$$\boxed{V = \iint_D [\phi_2(x, y) - \phi_1(x, y)]\,dx\,dy}$$

dir.

Bu formül $\phi_1(x, y)$, $\phi_2(x, y)$ fonksiyonlarının D bölgesinde sürekli ve $\phi_2(x, y) \geq \phi_1(x, y)$ olması hallerinde daima doğrudur.

ÖRNEK 1. $x^2 + y^2 = 16$ ve $x^2 + z^2 = 16$ silindirlerinin sınırladığı ortak hacmı hesaplayınız.

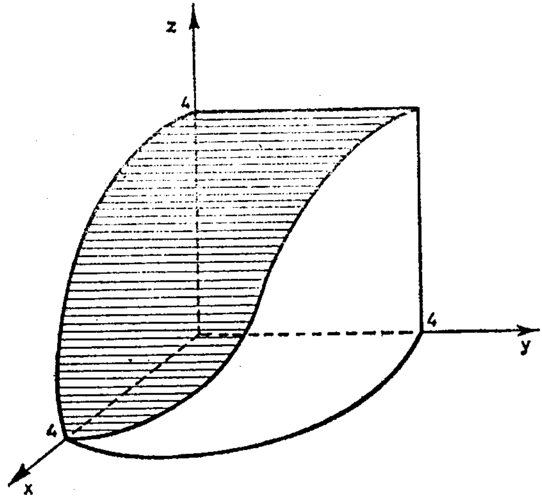
$$z = \sqrt{16 - x^2}$$

ve D bölgesi $x^2 + y^2 = 16$ dairesi olup (Şekil 219),

$$V = 8\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{16-x^2}\, dy dx$$

$$V = 8\int_0^4 (16 - x^2)\, dx$$

$$V = 8\left| 16x - \frac{x^3}{3} \right|_0^4 = \frac{1024}{3}$$



Şekil 219

ÖRNEK 2. Birinci bölgede, $y^2 + z^2 = a^2$ silindirinin içinde ve $y^2 = ax$ silindirinin dışında kalan hacmı hesaplayınız.

$$z = \sqrt{a^2 - y^2}$$

ve D bölgesi $y^2 = ax$ parabolu ile $y = 0$ ve $x = a$ doğrularının sınırladığı bölge (Şekil 220) olduğuna göre

$$V = \int_0^a \left(\int_0^{y^2/a} \sqrt{a^2 - y^2}\, dx \right) dy = \int_0^a \frac{y^2}{a} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy = \frac{\pi a^3}{16}$$

dir.

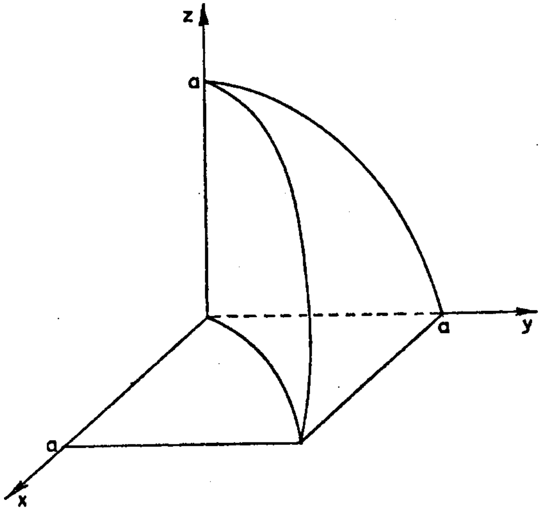
23.1 - 5. İki katlı integralin düzlem alanların hesabına uygulanması.

23.1-1. deki (1) toplamında $f(x, y) = 1$ alınırsa bu toplam

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\, \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i$$

şeklini alır. Buna göre

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \iint_D dA = \iint_D dx\, dy$$



Şekil 220

olur. Birinci taraftaki limit, D bölgesinin alanını vereceğine göre

$$\boxed{D \text{ nin alanı } = A = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

elde edilir. Eğer D bölgesi $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ eğrileri ile $x = a$, $x = b$ doğrularının sınırladığı bölge ise, alanı

$$\boxed{A = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x}$$

olacaktır. İçerdeki integral hesaplanırsa

$$A = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\,\mathrm{d}x$$

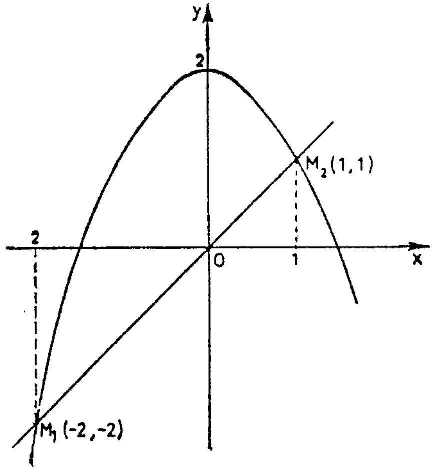
formülü elde edilir ki bu da, tek katlı integrallerde, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ eğrileri ile $x = a$, $x = b$ doğrularının sınırladığı alanı veren bir formüldür.

ÖRNEK 1. $y = 2 - x^2$, $y = x$ eğrilerinin sınırladığı alanı hesaplayınız.

Hesaplanacak alan Şekil 221 de görülmektedir. $y = 2 - x^2$, $y = x$ eğrilerinin kesim noktaları $M_1(-2, -2)$ ve $M_2(1, 1)$ olup aranan alan

$$A = \int_{-2}^{1}\left(\int_{x}^{2-x^2} \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{27}{6}$$

dır.



Şekil 221

ÖRNEK 2.

$$y = \sqrt{8x}\ ,\ y = 2\sqrt{6-x}$$

eğrileri ile $y = 0$ doğrusunun birinci bölgede sınırladıkları alanı hesaplayınız.

Verilen eğriler

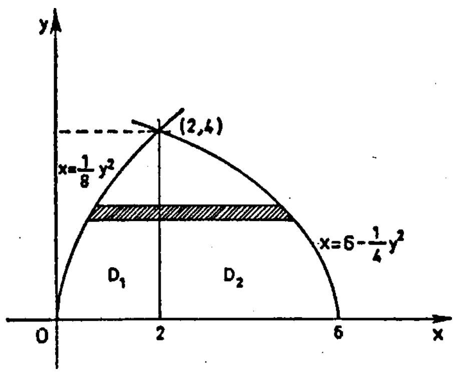
$$x = \frac{1}{8}y^2 \quad \text{ve} \quad x = 6 - \frac{1}{4}y^2$$

olup aranan alan Şekil 222 de gösterilmiştir. Buna göre alan :

$$A = \iint_D \mathrm{d}A = \int_0^4 \left(\int_{y^2/8}^{6-y^2/4} \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^4 \left(6 - \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{8}y^2\right)\mathrm{d}y$$

$$= 16$$



Şekil 222

dır. Evvelâ y ye göre integral almak, yani alanı oy ye paralel şeritlerin alanları toplamı olarak hesaplamak suretile sonuca varmak istersek D bölgesini $x = 2$ doğrusu ile, D_1 ve D_2 bölgelerine ayırmak gerekir. Bu takdirde alan

$$\iint_D \mathrm{d}A = \iint_{D_1} \mathrm{d}A + \iint_{D_2} \mathrm{d}A$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{8x}} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_2^6 \left(\int_0^{2\sqrt{6-x}} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^2 \sqrt{8x}\, \mathrm{d}x + \int_2^6 2\sqrt{6-x}\, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{16}{3} + \frac{32}{3} = 16$$

olur. Ancak bu ikinci yolun birinci yola nazaran daha zahmetli olduğu kolayca görülmektedir.

23.1 - 6. Kutupsal koordinatlarda iki katlı integraller.

xoy düzleminde, $\rho = \phi_1(\theta)$, $\rho = \phi_2(\theta)$ eğrileri ile $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ doğrularının sınırladıkları bir D bölgesini gözönüne alalım. Ayrıca

$$\phi_1(\theta) \leqq \phi_2(\theta) \quad \text{ve} \quad \alpha < \beta$$

olsun. Kutuptan geçen bir ışın D bölgesinin çevresini en çok iki noktada kesiyorsa bölge, *düzgün bölge* olur. Verilen bölgenin böyle bir düzgün bölge olduğunu kabul ediyoruz.

$z = F(\rho, \theta)$ fonksiyonu, verilen D bölgesinde sürekli, bir fonksiyon olsun. D bölgesini

$$\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots, \Delta A_n$$

kısmi bölgelerine ayıralım ve

$$\sum_{k=1}^{n} F(P_k)\, \Delta A_k$$

toplamını teşkil edelim. P_k , ΔA_k içinde alınmış bir noktadır. İki katlı integrallerin mevcudiyet teoremine göre, bu toplamın, ΔA_k ların herbiri sıfıra yaklaşmak şartiyle $n \to \infty$ halinde bir limiti mevcuttur. Bu limit de

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} F(P_k)\, \Delta A_k = \iint_D F(\rho, \theta)\, \mathrm{d}A}$$

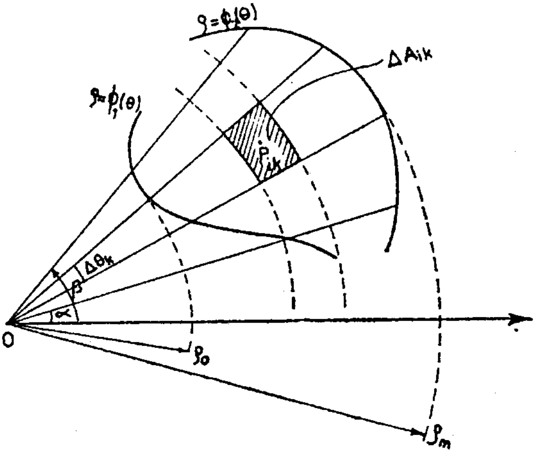
dır. Bu limit, D bölgesinin ΔA_k kısmi bölgelerine ayrılış şekline ve P_k noktalarının bu kısmi bölgelerde seçiliş şekline bağlı değildir.

Şimdi bu integrali nasıl hesaplıyacağımızı araştıralım. Bunun için de, dA yı yani ΔA_k ların şeklini belli etmemiz gerekir.

$\phi_1(\theta)$ nın D bölgesindeki en küçük değeri ρ_0 ve $\phi_2(\theta)$ nın D bölgesindeki en büyük değeri ρ_m olsun. $[\rho_0, \rho_m]$ aralığını m parçaya bölelim. Böylece elde edilen

$$\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$$

değerleri yarıçap ve kutup merkez olmak üzere çemberler çizelim. Şekil 223. Aynı şekilde θ nın $[\alpha, \beta]$ aralığını da n parçaya bölelim. Bunlar da



Şekil 223

$$\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \ldots, \Delta\theta_n$$

olsun. Bu suretle ΔA_{ik} kısmi bölgeleri elde edilmiş olur. Bu bölgeler için integral toplam

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{m} F(P_{ik}) \Delta A_{ik} \right]$$

çift toplamı şekline girer. P_{ik}, ΔA_{ik} içinde alınmış keyfi bir noktadır. Bu iki katlı toplam, bize evvelâ k sabit farzedilerek i indisi üzerine toplam yapılacağını; sonra da elde edilen toplamın k ya göre, elde edilecek toplamını ifade eder.

Şimdi ΔA_{ik} kısmi bölgesinin alanını bulmaya çalışalım. Bu alan, iki daire diliminin alanları farkına eşittir. Sonucu kolay elde edebilmek için, P_{ik} noktasını, ΔA_{ik} içinde ve $\rho_{i-1} < \rho_i' < \rho_i$ olmak üzere, yarıçapı

$$\rho_i' = \rho_{i-1} + \frac{\Delta\rho_i}{2} = \rho_i - \frac{\Delta\rho_i}{2}$$

olan çember üzerinde kabul edelim. Bu takdirde

$$\Delta A_{ik} = \frac{1}{2}\left(\rho_i' + \frac{\Delta\rho_i}{2}\right)^2 \Delta\theta_k - \frac{1}{2}\left(\rho_i' - \frac{\Delta\rho_i}{2}\right)^2 \Delta\theta_k$$

$$\Delta A_{ik} = \rho_i' \, \Delta\rho_i \, \Delta\theta_k$$

olur. Buna göre integral toplam

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m} F(P_{ik})\,\Delta A_{ik}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m} F(\theta_k, \rho_i')\,\rho_i'\,\Delta\rho_i\,\Delta\theta_k\right]$$

şekline girer. $\Delta\theta_k$, köşeli parantez içindeki toplamın bütün terimlerinde ortaktır. Bunu parantez dışına çıkarırsak

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m} F(\theta_k, \rho_i')\,\rho_i'\,\Delta\rho_i\right]\Delta\theta_k$$

elde edilir. Şimdi, $\Delta\theta_k$ yı sabit farzederek, her $\Delta\rho_i \to 0$ olacak şekilde $m \to \infty$ yapalım. Bu halde köşeli parantez içindeki ifade bizi tek katlı

$$\int_{\phi_1(\theta_k)}^{\phi_2(\theta_k)} F(\theta_k, \rho)\,\rho\,d\rho$$

belirli integraline götürecektir. O zaman yukarıdaki iki kat toplam

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\phi_1(\theta_k)}^{\phi_2(\theta_k)} F(\theta_k, \rho)\,\rho\,d\rho\right)\Delta\theta_k$$

şeklini alacaktır. Şimdi her $\Delta\theta_k$ sıfıra yaklaşacak şekilde $n \to \infty$ yapalım. Bu takdirde yukarıdaki toplam

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} F(\theta, \rho)\,\rho\,d\rho\right)d\theta$$

şeklini alır. Bu da kutupsal koordinatlarda iki katlı integral ifadesini verir. Sonuç olarak

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} F(P_k)\,\Delta A_k = \iint_D F(\rho, \theta)\,dA = \int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} F(\rho, \theta)\,\rho\,d\rho\right)d\theta$$

elde edilir.

İHTAR 1. Özel olarak $F(\rho, \theta) \equiv 1$ ise gözönüne alınan toplam, D bölgesini meydana getiren ΔA_{ik} kısmi bölgelerinin alanları toplamını verir ve limit olarak elde edilecek iki katlı integral de, D domeninin alanını verecektir. Buna göre $\rho = \phi_1(\theta)$, $\rho = \phi_2(\theta)$ eğrileri ile $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ doğrularının sınırladığı D bölgesinin alanı

$$\boxed{A = \iint_D \rho \, d\rho \, d\theta = \int_\alpha^\beta \left(\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} \rho \, d\rho \right) d\theta}$$

dır.

İHTAR 2. İntegral sırasının değiştirilmesi halinde iki katlı integralin alacağı şekli yazmak üzere, D bölgesinin, $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_2$, $\theta = \omega_1(\rho)$, $\theta = \omega_2(\rho)$ denklemleriyle tanımlanmış olduğunu farzedelim. Bu takdirde

$$\boxed{\iint_D F(\rho, \theta) \rho \, d\rho \, d\theta = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\int_{\omega_1(\rho)}^{\omega_2(\rho)} F(\rho, \theta) \, d\theta \right) \rho \, d\rho}$$

olur.

ÖRNEK. $\rho = 3 \cos \theta$ dairesinin içinde ve $\rho = 1 + \cos \theta$ kardioidinin dışındaki alanı hesaplayınız.

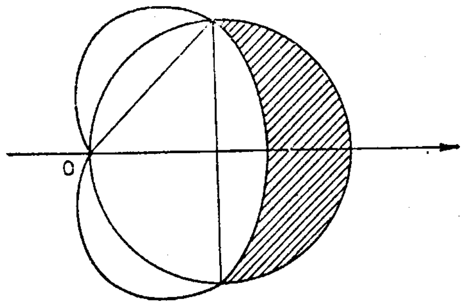
Hesaplanması istenen alan Şekil 224 de gösterilmiş olup

$$A = \iint_D \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= \int_{-\pi/3}^{+\pi/3} \left(\int_{1+\cos\theta}^{3\cos\theta} \rho \, d\rho \right) d\theta$$

$$= \pi$$

dir.



Şekil 224

23.1 - 7. İki katlı integrallerin kutupsal koordinatlara dönüştürülmesi suretile hesaplanması.

$\iint_D f(x, y) dx\, dy$ iki katlı integralini $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ dönüştürmesini yapmak suretile hesaplamak isteyelim.

D bölgesi $\rho = \phi_1(\theta)$, $\rho = \phi_2(\theta)$ eğrileri ile $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ doğrularının sınırlamış olduğu bölge olsun. Bu takdirde

$$f(x, y) = f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) = F(\rho, \theta)$$

olarak

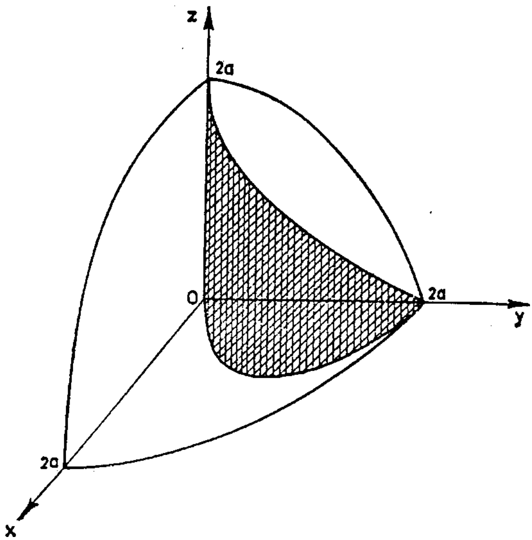
$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_\alpha^\beta \left(\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\, \rho\, d\rho \right) d\theta$$

dir.

ÖRNEK 1.

$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ küresi ile $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ silindirinin sınırladığı cismin hacmını hesaplayınız.

Şekil 225 hesaplanması istenen hacmın dörtte birini göstermektedir.



Şekil 225

Integrasyon bölgesi

$$x = \sqrt{2ay - y^2}$$

denklemiyle tanımlı yarım dairenin $x = 0$ doğrusu ile sınırladığı bölgedir.

$$z = f(x, y) = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$$

olup

$$\frac{1}{4} V = \int_0^{2a} \left(\int_0^{\sqrt{2ay - y^2}} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\, dx \right) dy$$

dir. Bu integralin hesabını, kutupsal koordinatlara geçmek suretile yapmak daha kolay olur. Buna göre

$$x = \rho \cos\theta \qquad , \qquad y = \rho \sin\theta$$

olup D domeninin kutupsal denklemi

$$\rho^2 - 2a\,\rho \sin\theta = 0$$

$$\rho = 2a \sin\theta$$

olur. Diğer taraftan $x^2 + y^2 = \rho^2$ olup aranan hacım

$$\frac{1}{4} V = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2a \sin\theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2}\, \rho \, d\rho \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left| - \frac{(4a^2 - \rho^2)^{3/2}}{3} \right|_0^{2a \sin\theta} d\theta$$

$$= - \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} [(4a^2 - 4a^2 \sin^2\theta)^{3/2} - 8a^3]\, d\theta$$

$$= \frac{8a^3}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^3\theta)\, d\theta = \frac{4}{9} a^3 (3\pi - 4)$$

$$V = \frac{16}{9} a^3 (3\pi - 4)$$

dir.

ÖRNEK 2. $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = B$$

olup

$$B^2 = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \right) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx\, dy$$

$$B^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2 - y^2} dx\, dy$$

dir. Bu integrali hesaplamak için, kutupsal koordinatlara geçersek,

$$B^2 = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho \, d\rho \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left| - \frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right|_0^{\infty} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\theta$$

$$B^2 = \frac{\pi}{4} \qquad\qquad B = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

yani

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

bulunur.

23.1 - 8. İki katlı integrallerde değişken değiştirilmesi.

Konu, $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ iki katlı integrali verildiği takdirde

$$x = \varphi(u,v) \quad , \quad y = \psi(u,v) \tag{1}$$

denklemleriyle yapılacak değişken değiştirilmesi sonucunda, integralin alacağı şekli bulmaktır. (1) formülleri, bir düzlemin, diğer bir düzlem üzerindeki *noktasal transformasyonunu* tanımlar. Bu dönüştürme sırasında, iki katlı integral işareti altındaki $dx\,dy$ yerine $du\,dv$ koymak doğru olmaz. $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ nin (1) dönüştürmesi sonucunda alacağı şekil

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} f[\varphi(u,v),\psi(u,v)] \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv} \tag{2}$$

dir.

$x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ fonksiyonlarının $uo'v$ düzleminin D' bölgesinde tanımlı ve sürekli türevlere malik olduğunu farzediyoruz. (1) denklemlerinden elde edilen (x,y) noktaları xoy düzleminin D bölgesinde bulunurlar. Bunlardan D bölgesinde tanımlı ve sürekli olan

$$u = u(x,y) \quad , \quad v = v(x,y)$$

ters fonksiyonları yazılabilir.

$f(x,y)$ fonksiyonu D bölgesinde sürekli ise $f[\varphi(u,v)\ ,\ \psi(u,v)]$ fonksiyonu da D' bölgesinde sürekli olur.

Şimdi yukarıdaki (2) eşitliğinin doğruluğunu göstermeğe çalışalım.

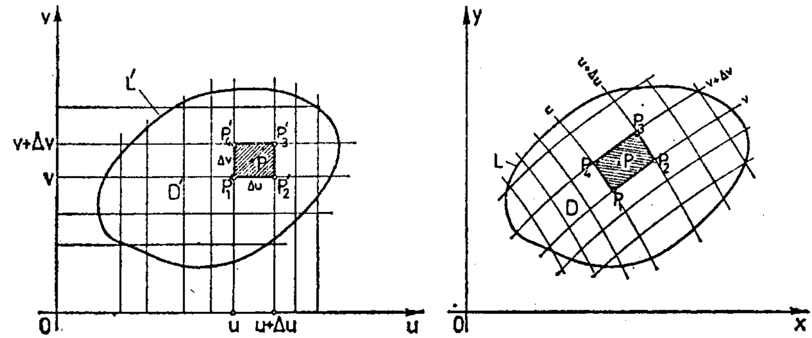
$uo'v$ ve xoy kartezyen koordinat sistemlerini gözönüne alalım. xoy düzleminin her $P(x,y)$ noktasına, $uo'v$ düzleminin bir $P'(u,v)$ noktası karşılık gelir. (Bire bir karşılık gelme). u, v koordinatları $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ denklemleriyle belirlidir. u ve v sayılarına P noktasının *eğrisel koordinatları* denir. Eğer, xoy düzleminde P noktası, D bölgesini çevreliyen L kapalı eğrisini çiziyor ise, buna karşılık olan nokta da $uo'v$ düzleminde D' bölgesini çevreliyen L' eğrisini çizer. Buna göre D' nün her noktasına D nin bir noktası karşılık gelir. Böylece (1) formülleri D ve D' bölgelerinin noktaları arasında bire bir tekabülü gösterir. Şekil 226.

D' bölgesini $u = st$, $v = st$ doğruları ile dik dörtgen bölgelere ayıralım. Bu doğrulara D bölgesinde karşılık gelen eğriler de bu bölgeyi eğrisel dörtgenlere ayırır.

$uo'v$ düzleminde $u = st$, $u + \Delta u = st$, $v = st$, $v + \Delta v = st$ doğrularının sınırladığı $\Delta A'$ dik dörtgenini ve xoy düzleminde buna karşılık gelen ΔA eğrisel dörtgenini gözönüne alalım. Bu kısmi bölgelerin alanları da $\Delta A'$ ve ΔA olsun. Buna göre

$$\Delta A' = \Delta u \,.\, \Delta v$$

olur. ΔA ve $\Delta A'$ alanları genel olarak birbirinden farklıdır.



Şekil 226

D bölgesinde sürekli olan $z = f(x, y)$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $z = f(x, y)$ fonksiyonunun D bölgesindeki her değerine D' bölgesinde aynı $z = F(u, v)$ değeri karşılık gelir. Yani

$$F(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]$$

dir. $z = f(x, y)$ fonksiyonunun D bölgesindeki integral toplamlarını gözönüne alalım. Bu takdirde

$$\Sigma f(x, y)\, \Delta A = \Sigma F(u, v)\, \Delta A$$

eşitliği yazılabilir. Şimdi de ΔA yı yani xoy düzlemindeki $P_1P_2P_3P_4$ eğrisel dörtgeninin alanını hesaplıyalım. Bu dörtgenin köşelerinin koordinatları

$$\begin{array}{llll}
P_1(x_1, y_1) , & x_1 = \varphi(u, v) , & & y_1 = \psi(u, v) \\
P_2(x_2, y_2) , & x_2 = \varphi(u + \Delta u, v) , & & y_2 = \psi(u + \Delta u, v) \\
P_3(x_3, y_3) , & x_3 = \varphi(u + \Delta u, v + \Delta v) & , & y_3 = \psi(u + \Delta u, v + \Delta v) \\
P_4(x_4, y_4) , & x_4 = \varphi(u, v + \Delta v) , & & y_4 = \psi(u, v + \Delta v)
\end{array}$$

dır. $P_1P_2P_3P_4$ eğrisel dörtgeninin alanının hesabında, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1 yaylarını paralel doğru parçalarına benzetebiliriz. Diğer taraftan, φ, ψ fonksiyonlarının artımları yerine, yaklaşık olarak, diferansiellerini alabiliriz. Yani, bu suretle $\Delta u, \Delta v$ sonsuz küçüklerinin yüksek mertebeli terimlerini ihmal ediyoruz demektir. Buna göre yukarıdaki formüller,

$$x_1 = \varphi(u, v) \quad , \quad y_1 = \psi(u, v)$$

$$x_2 = \varphi(u, v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u \quad , \quad y_2 = \psi(u, v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u$$

$$x_3 = \varphi(u, v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v \quad , \quad y_3 = \psi(u, v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v$$

$$x_4 = \varphi(u, v) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v \qquad y_4 = \psi(u, v) + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v$$

şeklini alır. Bu hipotezlere göre, $P_1P_2P_3P_4$ eğrisel dörtgeni bir paralel kenara benzetilebilir. ΔA alanı, yaklaşık olarak, $P_1P_2P_3$ üçgen alanının iki katına eşit olacaktır. Üçgenin, analitik geometrideki, alan formulüne göre

$$\Delta A \cong \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta A \cong |(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)|$$

$$\Delta A \cong \left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\right)\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u - \frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\Delta v\right|$$

$$= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta u\,\Delta v - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u\,\Delta v\right|$$

$$= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right|\Delta u\,\Delta v$$

$$= \left|\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}\right| \Delta u\,\Delta v$$

$$\Delta A \cong \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| \Delta u\,\Delta v$$

elde edilir. Buna göre

$$\Delta A \cong \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| \Delta A'$$

elde edilmiş olur. Burada

$$\left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| = |J|$$

x, y nin u, v ye göre fonksiyonel determinantının mutlak değeridir.

Elde edilen son bağıntı, bazı ihmallerin yapılması nedeni ile yaklaşık olarak elde edilmiştir. Çok defa, ΔA , $\Delta A'$ bölgeleri çok küçük seçilmiş olacağından eşitlik kullanılabilir. Bu eşitlik yerine ΔA , $\Delta A'$ bölgelerinin en büyük boyutlarının sıfıra yaklaşması halinde

$$\lim_{\text{çap } \Delta A \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta A'} = |J|$$

eşitliği kullanılabilir.

Şimdi elde edilen bu eşitliği iki katlı integrale uygulayalım. Buna göre

$$\Sigma f(x,y)\ \Delta A = \Sigma F(u,v)\ \Delta A$$

$$\Sigma f(x,y)\ \Delta A \cong \Sigma F(u,v)\ |J|\ \Delta A'$$

veya

$$\Sigma f(x,y)\ \Delta A \cong \Sigma F(u,v)\ |J|\ \Delta u\, \Delta v$$

olur. $\Delta A'$ ler sıfıra yaklaşacak şekilde bölgelerin sayısı sınırsız olarak artırılırsa

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \iint_{D'} F(u,v)\ |J|\ du\ dv$$

veya

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \iint_{D'} f[(\varphi(u,v)\,,\,\psi(u,v)]\left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du\ dv$$

elde edilir.

Bu formül iki katlı integrallere ait genel değişken dönüştürme formülüdür. Bu formül, problemleri basitleştirmek gayesile, D bölgesinde hesaplanması gereken iki katlı bir integrali, D' bölgesinde hesaplanacak iki katlı bir integrale dönüştürmeye yarar.

İHTAR. İki katlı integrallerde, kartezyen koordinatlardan, kutupsal koordinatlara geçişi 21.1-7. de incelemiştik. Bu hal iki katlı integrallerdeki genel dönüştürmenin özel bir halidir, gerçekten

$$u = \theta \quad , \quad v = \rho$$

alınırsa dönüştürme formülleri

$$x = \rho \cos \theta \quad , \quad y = \rho \sin \theta$$

ve

$$J = \frac{D(x, y)}{D(\theta, \rho)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho \sin \theta & \cos \theta \\ \rho \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix} = -\rho$$

olarak

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_\alpha^\beta \left(\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} F(\theta, \rho) \, \rho \, d\rho \right) d\theta$$

olur.

ÖRNEK 1. D bölgesi köşeleri $(1, 0)$, $(2, 2)$, $(1, 3)$ ve $(0, 1)$ noktaları olan bir paralel kenar olduğuna göre

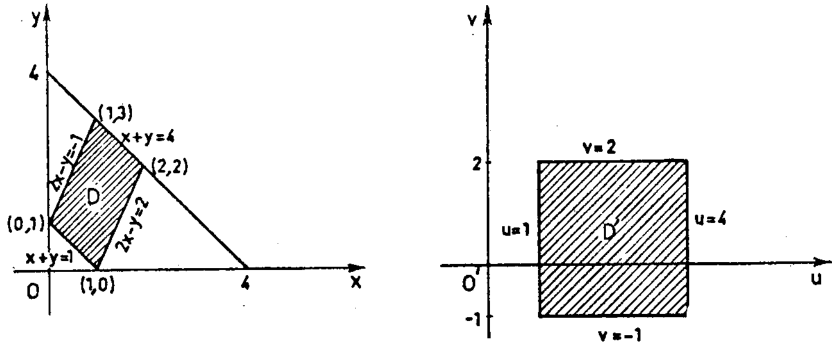
$$\iint_D (x + y)^4 \, dx \, dy$$

iki katlı integralini hesaplayınız.

Köşeleri $(1, 0)$, $(2, 2)$, $(1, 3)$, $(0, 1)$ olan paralelkenar Şekil 227 de gösterilmiştir. Bu paralelkenarın kenarlarının denklemleri

$$x + y = 1 \quad , \quad x + y = 4$$
$$2x - y = -1 \quad , \quad 2x - y = 2$$

dir. O halde D bölgesi bu doğruların sınırladığı bölgedir.



Şekil 227

Bu integralin doğrudan doğruya hesabı oldukça zahmetli ve can sıkıcıdır. Ancak basit bir değişken dönüştürmesi ile integral, kenarları koordinat eksenlerine paralel bir dik dörtgen bölgesinde hesaplanacak bir integral haline sokulabilir.

Gerçekten

$$x + y = u \quad , \quad 2x - y = v$$

dönüştürmeleri yapılırsa $2x - y = -1$, $2x - y = 2$ doğrularına $uo'v$ düzleminde

$$v = -1 \quad , \quad v = 2$$

doğruları ve $x + y = 1$, $x + y = 4$ doğrularına da

$$u = 1 \quad , \quad u = 4$$

doğruları karşılık gelecektir. Buna göre xoy deki D bölgesi, $uo'v$ deki D' dikdörtgen bölgesine dönüşmüş olacaktır. Şekil 227. Buna göre

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{3}$$

olup

$$\iint_D (x+y)^4 \, dx \, dy = \iint_{D'} u^4 \, . \, \frac{1}{3} \, du \, dv$$

$$= \frac{1}{3}\left(\int_1^4 u^4 \, du\right)\left(\int_{-1}^2 dv\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left|\frac{u^5}{5}\right|_1^4 \, |v|_{-1}^2$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{4^5}{5} - \frac{1}{5}\right) . \, 3 = \frac{1023}{5}$$

dir.

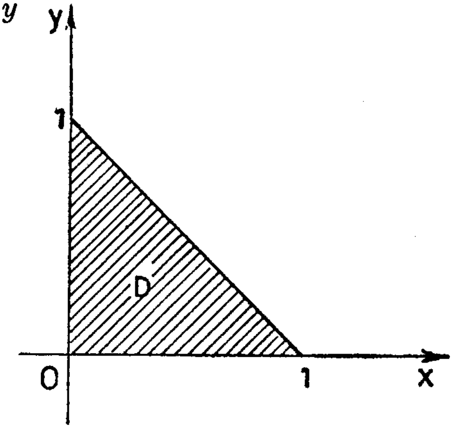
ÖRNEK 2. $\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{(y-x)\,(y+x)} \, dx dy$

integralini hesaplayınız.

İntegrasyon bölgesi

$$y = 0 \quad , \quad y = 1 - x \quad , \quad x = 0$$

doğrularının sınırladığı bölge olup Şekil 228 de gösterilmiştir.



Şekil 228

$$y + x = u \quad , \quad y - x = v$$

dönüştürmesini yapalım. Buna göre D bölgesinin $y = 1 - x$ doğrusuna, $u = 1$; $y = 0$ doğrusuna $u = -v$ ve $x = 0$ doğrusuna $u = v$ doğruları karşılık gelmekte olup D' bölgesi Şekil 229 da gösterilmiştir. Buna göre

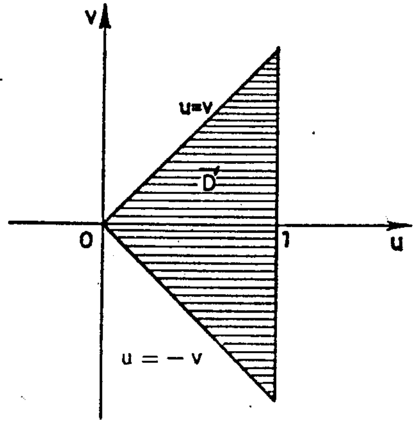
$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

olup

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{y-x/y+x} \, dx \, dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_{-u}^{+u} e^{v/u} \, dv\right) du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left| u \, e^{v/u} \right|_{-u}^{+u} du$$



Şekil 229

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 u\,(e - e^{-1})\,du$$

$$= \frac{e - e^{-1}}{2}\left|\frac{u^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}\,\frac{e - e^{-1}}{2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,1$$

dir.

23.1 - 9. Yüzey alanlarının hesabı.

Bir L eğrisi ile sınırlanmış bir yüzeyin alanını hesaplamak isteyelim. Yüzeyin ilk olarak $z = f(x, y)$ kartezyen denklemi ile verilmiş olduğunu kabul edelim. $z = f(x, y)$ fonksiyonu, gözönüne alınan bölgede sürekli ve kısmi türevlere malik olsun. L eğrisinin, xoy düzlemindeki izdüşümü c eğrisi ve bu c eğrisi ile sınırlanan bölge D olsun. D bölgesini eksenlere paralel doğrularla dik dörtgen bölgelere ayıralım. Bunların alanları ΔA_i olsun. Bu bölgeciklerde keyfi birer $P_i(x_i', y_i')$ noktası seçelim. Bu şekilde seçilen her P_i noktasına, yüzey üzerinde

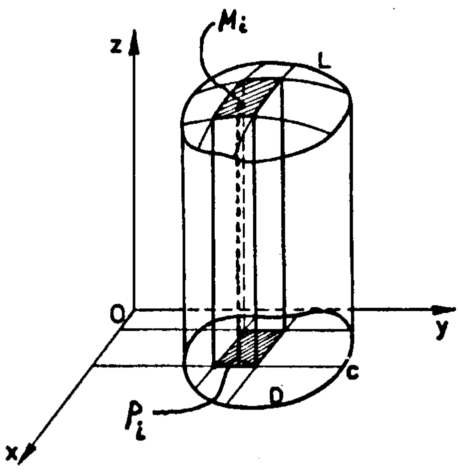
$$M_i[x_i', y_i', f(x_i', y_i')]$$

gibi bir nokta karşılık gelir. Şekil 230.

Yüzeyin bu şekilde seçilmiş M_i noktalarındaki teğet düzlemleri çizelim. Bu düzlemlerin denklemleri

$$z - z_i' = f_x'(x_i', y_i')(x - x_i') +$$
$$+ f_y'(x_i', y_i')(y - y_i')$$

olacaktır. Bu şekildeki teğet düzlemler üzerinde bulunan ve xoy deki izdüşümü ΔA_i olan $\Delta S_i'$ alanlı bölgeleri ve bu bölgelerin alanları toplamını gözönüne alalım. Şekil 231.



Şekil 230

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i'$$

Bu toplamın, herbir $\Delta S_i'$ sıfıra yaklaşmak şartiyle, $n \to \infty$ halindeki limiti, hesaplanması istenen alanı verir. Buna göre

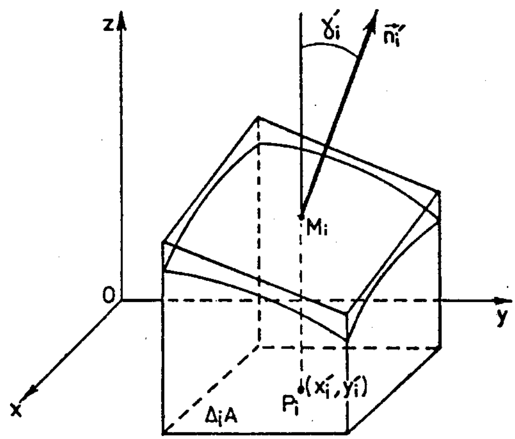
$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i'$$

dır. Şimdi de bu limiti hesaplamıya çalışalım. Teğet düzlemle, *xoy* düzlemi arasındaki açı, bunların normallerinin teşkil ettiği açı olup

$$\Delta S_i' \cos \gamma_i' = \Delta A_i$$

veya

$$\Delta S_i' = \sec \gamma_i' \, \Delta A_i$$



Şekil 231

dir. γ_i', $\vec{n}_i'$ normali ile *oz* veya $\vec{k}$ vektörü arasındaki açıdır. Teğet düzlemin normali

$$\vec{n}_i' = -\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}$$

olup

$$\vec{n}_i' \cdot \vec{k} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}\right) \cdot \vec{k} = 1$$

$$\left|\vec{n}_i'\right| \cos \gamma_i' = 1 \quad ; \quad \cos \gamma_i' = \frac{1}{\left|\vec{n}_i'\right|}$$

veya

$$\cos \gamma_i' = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

ve

$$\sec \gamma_i' = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

dir. Kök altındaki türevlerin $(x'_i\ ,\ y'_i)$ noktasındaki değerleri hesaplanmalıdır. Bunlara göre

$$\Delta S_i' = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\ \Delta A_i$$

$$\Delta S_i' = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\ \Delta x_i\ \Delta y_i$$

olup

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i' = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\ \Delta x_i\ \Delta y_i$$

$$\boxed{S = \iint_D \sec \gamma\ dx\ dy = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\ dx\ dy}$$

dir.

İHTAR. Yüzeyin denklemi $y = \varphi(x, z)$ veya $x = h(y, z)$ şeklinde verilmişse yüzeyin alanını veren formüller

$$S = \iint_{D'} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\ dx\ dz$$

$$S = \iint_{D''} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\ dy\ dz$$

şekillerini alır. D' ve D'' bölgeleri yüzeyin zox ve yoz düzlemlerindeki izdüşümleridir.

ÖRNEK 1. $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin $z = 1$ düzleminin altında kalan kısmının alanını bulunuz.

Alanı hesaplanmak istenen yüzeyin, xoy düzlemindeki izdüşümü olan D bölgesi (Şekil 232)

$$x^2 + y^2 = 1$$

dairesidir. Buna göre

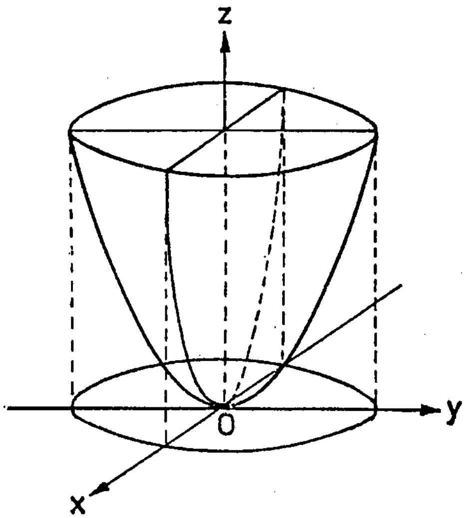
$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

ve

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

olup

$$S = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy$$



Şekil 232

dir. Bu integrali hesaplamak için kutupsal koordinatlara dönüştürürsek,

$$S = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{4\rho^2 + 1}\ \rho\, d\rho \right) d\theta = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1)$$

bulunur.

ÖRNEK 2. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ küresinin alanını hesaplayınız.

Küre yüzeyinin sekizde biri Şekil 233 de gösterilmiştir. Bu kısmın xoy deki izdüşümü

$$x^2 + y^2 = R^2$$

dairesinin dörtte biridir. Diğer taraftan

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

ve

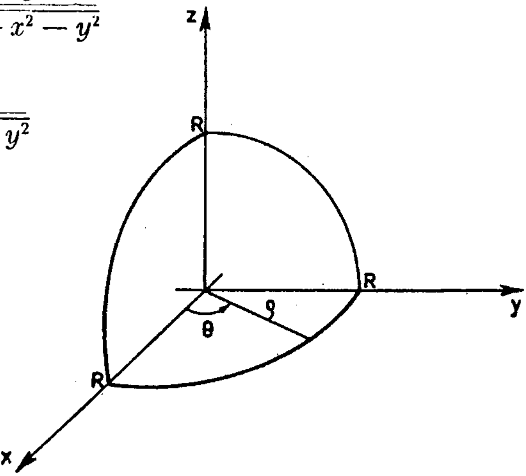
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \; ; \; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

olup

$$\frac{1}{8} S = \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\, dx\, dy$$

dir. Bu integrali hesaplamak üzere kutupsal koordinatlara geçersek,



Şekil 233

$$S = 8\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\,\rho\, d\rho\right) d\theta$$

$$= 8R\int_0^{\pi/2} \left| -\sqrt{R^2-\rho^2}\right|_0^R d\theta$$

$$= 8R^2 \left| \theta \right|_0^{\pi/2} = 4\pi R^2$$

bulunur.

Şimdi de yüzeyin,

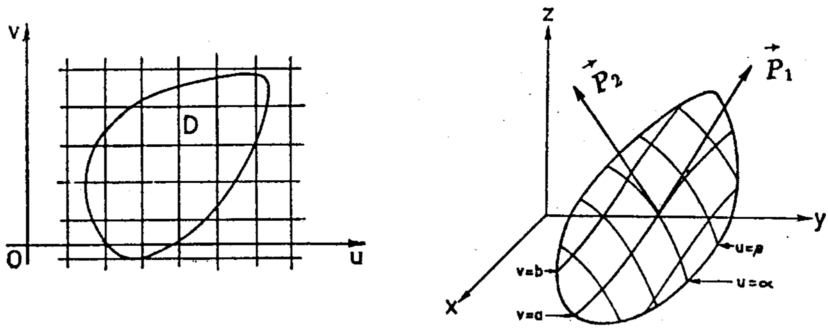
$$x = x(u,v) \quad , \quad y = y(u,v) \quad , \quad z = z(u,v)$$

parametrik denklemleriyle verilmiş olduğunu düşünelim.

Bu denklemlerde, $u = st$, $v = st$ yapıldığı zaman, denklemlerin bizi, bir eğrinin parametrik denklemlerine götüreceği aşıkârdır. u, v ler (uv) düzleminin bir bölgesinde değer alırlar. Bu bölgeyi eksenlere paralel $u = st$, $v = st$ doğruları ile dik dörtgen bölgelere ayıralım. $u = st$, $v = st$ doğrularına yüzey üzerinde eğriler ve

$$\Delta A = \Delta u \,.\, \Delta v$$

alanına malik her dik dörtgen elemanına da, yüzey üzerinde bir eğrisel alan karşılık gelecektir. (Şekil 234) Bu alan elemanı, yaklaşık olarak, kenarları $|\vec{P}_1|\Delta u$, $|\vec{P}_2|\Delta v$ olan bir paralel kenardır. Zira, $\vec{P}_1$ i u zamanına göre hız vektörü olarak düşünebiliriz. O takdirde,



Şekil 234

$$\frac{ds_1}{du} = |\vec{P}_1|$$

yazılabilir. Buradaki s_1 , $v = st$ eğrisi boyunca alınan yoldur. u zamanının küçük değişmeleri için alınan yol

$$ds_1 = |\vec{P}_1| \, \Delta u$$

dur. Benzer şekilde paralel kenarın diğer kenarının da $|\vec{P}_2| \Delta v$ olduğu gösterilebilir. $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ vektörleri paralel kenarın bir köşesinden çizilmişlerdir. O halde paralelkenarın kenarları

$$\vec{P}_1 \, . \, \Delta u \quad , \quad \vec{P}_2 \, . \, \Delta v$$

vektörleri ile gösterilebilir. Bunlara göre paralel kenarın alanı

$$|(\vec{P}_1 \, . \, \Delta u) \wedge (\vec{P}_2 \, . \, \Delta v)| = |\vec{P}_1 \wedge \vec{P}_2| \, \Delta u \, \Delta v$$

dir. Bu şekildeki paralel kenarların, alanları toplamının, D bölgesindeki bölme sayısının sınırsız olarak artması halindeki limiti, bize aranan yüzeyin alanını verecektir. Buna göre

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |\vec{P}_{1i} \wedge \vec{P}_{2i}| \, \Delta u_i \, \Delta v_i$$

$$\boxed{S = \iint_D |\vec{P}_1 \wedge \vec{P}_2| \, du \, dv}$$

dir. Vektör cebrine göre

$$|\vec{P}_1 \wedge \vec{P}_2|^2 = |\vec{P}_1|^2\,|\vec{P}_2|^2 - |\vec{P}_1 . \vec{P}_2|^2$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$S = \iint_D \sqrt{|\vec{P}_1|^2\,|\vec{P}_2|^2 - |\vec{P}_1 . \vec{P}_2|^2}\, du dv$$

olur. Burada

$$\vec{P}_1 = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k}$$

$$\vec{P}_2 = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}$$

ve

$$|\vec{P}_1|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = E$$

$$|\vec{P}_2|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = G$$

$$|\vec{P}_1 . \vec{P}_2| = \frac{\partial x}{\partial u}\;\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\;\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\;\frac{\partial z}{\partial v} = F$$

olarak kabul edilirse yukarıdaki formül

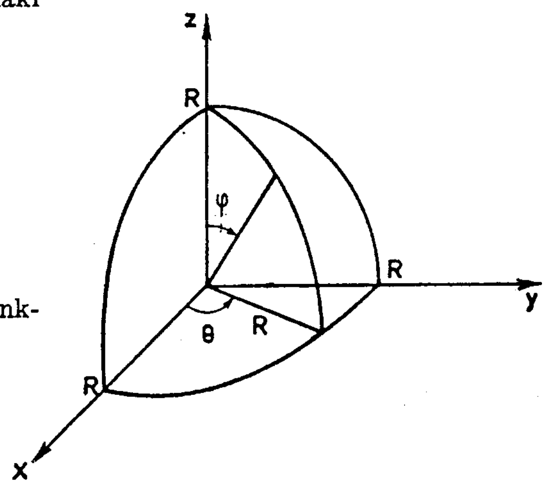
$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

şeklini alır.

ÖRNEK 3. Parametrik denklemleri

$$x = R \sin\varphi \cos\theta \quad ,$$
$$y = R \sin\varphi \sin\theta \quad ,$$
$$z = R \cos\varphi$$

olan yüzeyin alanını bulunuz. Şekil 235.



Şekil 235

Verilen yüzey bir küre olup Şekil 235, aranan alanın sekizde birini göstermektedir. Buna göre

$$S = 8\iint_D \sqrt{EG - F^2}\, d\theta\, d\varphi$$

dir. Burada

$$E = R^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta + R^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta = R^2 \sin^2\varphi$$

$$G = R^2 \cos^2\varphi \cos^2\theta + R^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta + R^2 \sin^2\varphi = R^2$$

$$F = -R^2 \sin\varphi \sin\theta \cos\varphi \cos\theta + R^2 \sin\varphi \cos\theta \cos\varphi \sin\theta = 0$$

olup

$$S = 8\iint_D \sqrt{R^4 \sin^2\varphi}\, d\theta\, d\varphi = 8R^2 \iint_D \sin\varphi\, d\theta\, d\varphi$$

$$= 8R^2 \left(\int_0^{\pi/2} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\, d\varphi\right)$$

$$= 8R^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right) = 4\pi R^2$$

dir.

ÖRNEK 4. $A = \dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}, B = \dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}, C = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ olduğuna göre

$$\boxed{\iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv}$$

olduğunu gösteriniz.

$$EG - F^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]$$

$$- \left[\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial z}{\partial v}\right]^2$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 +$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\,\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$= \left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2$$

$$= A^2 + B^2 + C^2$$

olarak

$$\iint_D \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv = \iint_D \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du\, dv$$

dir.

23.1 - 10. İki katlı integrallere ait diğer uygulamalar.

1. Yüzeysel yoğunluğu $f(x, y)$ *olan plak bir cismin kütlesi :*

$$\boxed{M = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy}$$

dir.

2. Düzlem bir şeklin eylemsizlik momenti :

o başlangıç noktasına göre eylemsizlik momenti

$$\boxed{I_0 = \iint_D (x^2+y^2)\, f(x,y)\, dx\, dy} ;$$

ox eksenine göre eylemsizlik momenti

$$\boxed{I_{0x} = \iint_D y^2 f(x,y)\, dx\, dy} ;$$

oy eksenine göre eylemsizlik momenti

$$\boxed{I_{0y} = \iint_D x^2 f(x,y)\, dx\, dy}$$

dir.

3. Plak bir cismin ağırlık merkezi :

Homojen plak bir cismin, ağırlık merkezinin koordinatları ;

$$\boxed{\overline{x} = \frac{\iint_D x\, dx\, dy}{\iint_D dx\, dy} , \ \overline{y} = \frac{\iint_D y\, dx\, dy}{\iint_D dx\, dy}} ;$$

Yüzeysel yoğunluğu $f(x, y)$ olan plak bir cismin ağırlık merkezinin koordinatları :

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\, f(x, y)\, dx\, dy}{\iint_D f(x, y)\, dx\, dy}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y\, f(x, y)\, dx\, dy}{\iint_D f(x, y)\, dx\, dy}$$

dir.

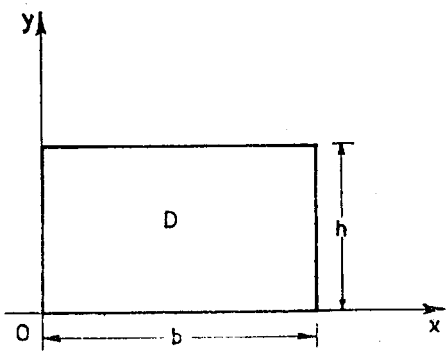
ÖRNEK 1. Bir dik dörtgenin tabanına göre eylemsizlik momentini bulunuz. $f(x, y) = 1$.

Dik dörtgen, Şekil 236 da olduğu gibi düşünülürse

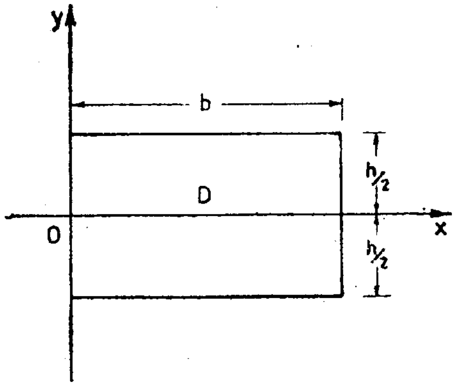
$$I_{ox} = \iint_D y^2\, dx\, dy = \left(\int_0^b dx\right)\left(\int_0^h y^2\, dy\right) = \frac{h^3 b}{3}$$

ÖRNEK 2. Bir dik dörtgenin, yüksekliğinin ortasından geçen ve tabanına paralel olan doğruya nazaran eylemsizlik momentini bulunuz. $f(x, y) = 1$.

Koordinat eksenleri, Şekil 237 deki gibi seçilirse, eylemsizlik momenti ox eksenine göre olarak,



Şekil 236



Şekil 237

$$I_{ox} = \iint_D y^2\, dx\, dy = \left(\int_0^b dx\right)\left(\int_{-h/2}^{+h/2} y^2\, dy\right)$$

$$= b \left| \frac{y^3}{3} \right|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}$$

bulunur.

ÖRNEK 3. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ elipsinin $A(a,o)$, $B(o,b)$ noktalarını birleştiren kirişinin meydana getirdiği homojen elips parçasının ağırlık merkezini bulunuz.

Ağırlık merkezini bulacağımız elips parçası Şekil 238 de gösterilmiştir. Evvelâ ağırlık merkezinin apsisi olan

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}=\frac{\iint\limits_D x\,dx\,dy}{D\ nin\ alanı}$$

yi hesaplayalım. Paydadaki integral

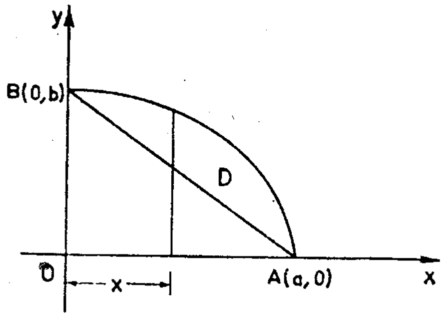
$$\iint\limits_D dx\,dy = D \text{ nin alanı} = \frac{1}{4}\text{ Elips alanı} - AOB \text{ üçgeninin alanı}$$

$$=\frac{\pi ab}{4}-\frac{ab}{2}=\frac{ab}{4}(\pi-2)$$

dir. Şimdi de

$$\iint\limits_D x\,dx\,dy$$

integralini hesaplıyalım. AB kirişinin denklemi



Şekil 238

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \text{veya} \quad y=\frac{b}{a}(a-x)$$

ve AB yayının denklemi

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

olup

$$\iint\limits_D x\,dx\,dy=\int_0^a\left(\int_{b/a\,(a-x)}^{b/a\sqrt{a^2-x^2}}dy\right)x\,dx$$

$$=\int_0^a\left[\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{b}{a}(a-x)\right]x\,dx$$

$$= \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, x\, dx - b\int_0^a x\, dx + \frac{b}{a}\int_0^a x^2\, dx$$

$$= \left| -\frac{b}{3a}\left(a^2 - x^2\right)^{3/2} - \frac{bx^2}{2} + \frac{bx^3}{3a} \right|_0^a$$

$$= -\frac{a^2 b}{2} + \frac{a^2 b}{3} + \frac{a^2 b}{3} = \frac{a^2 b}{6}$$

dir. Bunlara göre

$$\bar{x} = \frac{\dfrac{a^2 b}{6}}{\dfrac{ab}{4}(\pi - 2)} = \frac{2a}{3(\pi - 2)}$$

dir. Aynı şekilde işlem yapılarak $\bar{y}$ için de

$$\bar{y} = \frac{\iint\limits_D y\, dx\, dy}{\iint\limits_D dx\, dy} = \frac{2b}{3(\pi - 2)}$$

bulunur.

23.2 Üç katlı integral.

23.2 - 1. Üç katlı integralin tanımı.

Bir S yüzeyi ile sınırlanmış bir V uzay bölgesi ve bu bölgede tanımlı ve sürekli olan, bir $f(x, y, z)$ fonksiyonu gözönüne alalım. Bu bölgeyi herhangi şekilde,

$$\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$$

gibi n bölgeye ayıralım. ΔV_i ler aynı zamanda bu bölgelerin hacımlarını göstersinler. Bu bölgelerin herbirinde, birer P_i noktası seçelim ve $f(x, y, z)$ fonksiyonunun bu noktalardaki

$$f(P_1)\ ,\ f(P_2)\ , \ldots , f(P_n)$$

değerlerini hesaplıyalım. Sonra da bu değerlerin herbirini, noktaların ait oldukları bölgelerin hacımları ile çarpalım ve bu çarpımların

$$f(P_1)\,\Delta V_1 + f(P_2)\,\Delta V_2 + \ldots + f(P_n)\,\Delta V_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta V_i$$

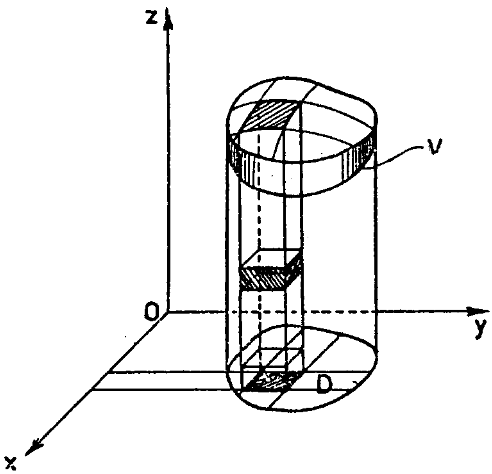
şeklindeki toplamını teşkil edelim. Bu toplamın, herbir ΔV_i hacmı sıfıra yaklaşacak şekilde, n in sınırsız olarak artması halindeki limitini düşünelim. Bu limit, $f(x, y, z)$ fonksiyonunun V bölgesindeki üç katlı integrali olarak adlandırılır ve işaretle

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta V_i = \iiint_V f(x, y, z)\, dV$$

şeklinde gösterilir.

Bu limit, V bölgesinin kısmi bölgelere ayrılış şekline ve P_i noktalarının bölgelerde seçiliş şekline bağlı değildir.

V bölgesi, koordinat düzlemlerine paralel düzlemlerle kısmi bölgelere bölünürse, ΔV_i ler (Şekil 239)



Şekil 239

$$\Delta V_i = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$$

olur ve

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta V_i = \iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

yazılır.

$f(x, y, z)$, V bölgesini oluşturan maddenin yoğunluğu olduğu farzedilirse, tanımlanan üç katlı integral, bu maddenin kütlesi olur.

23.2 - 2. Üç katlı integralin hesabı.

Üç katlı integralin tanımında elde edilmiş olan

$$\Sigma f(P_i) \Delta V_i$$

toplamı gerçekte,

$$\Sigma f(P_i) \Delta V_i = \Sigma\Sigma\Sigma f(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z$$

toplamlarına karşılıktır.

İkinci tarafı teşkil eden toplamda z ve Δz i sabit tutarsak

$$\Delta z \Sigma\Sigma f(x, y, z) \Delta x \Delta y$$

elde edilir. Burada Δz in katsayısı durumunda olan iki kat toplam, iki katlı integral tanımına göre,

$$\iint_{D(z)} f(x, y, z) \, dx \, dy = F(z)$$

iki katlı integralinin yaklaşık değeridir. Buradaki $D(z)$ bölgesi, V bölgesinin z kotlu bir düzlemle arakesitinin xoy düzlemindeki izdüşümüdür.

$F(z) \Delta z$ in yaklaşık değeri olan kısmi toplam yerine bu değeri koyarsak, verilen üç katlı toplam

$$\Sigma F(z) \Delta z$$

şekline girer ki bu da,

$$\int_{z_1}^{z_2} F(z) \, dz$$

integralinin yaklaşık değeridir. Bunlara göre

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \Delta V_i = \iiint_V f(P) \, dV = \int_{z_1}^{z_2} \left(\iint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \right) dz$$

olur.

V bölgesi $z = \psi_1(x, y)$, $z = \psi_2(x, y)$ yüzeyleri ile sınırlanmış bir bölge ve bunun xoy deki izdüşümü olan D bölgesi de $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$ eğrileri ile sınırlanmış bir bölge ise üç katlı integraller

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right] dx$$

ardışık integrali ile hesaplanır.

Bu şekilde gözönüne alınmış olan V bölgesinin aşağıdaki özelikleri bulunması gerekir.

1. V nin bir iç noktasından geçen ve oz eksenine paralel her doğru, S yüzeyini iki noktada kesmelidir.

2. V bölgesinin tamamının xoy düzlemindeki izdüşümü düzgün bir bölge olmalıdır.

3. xoy , yoz , zox düzlemlerinden herhangibirine paraleller çizmek suretile V bölgesinden ayrılmış olan her parça (1) ve (2) özeliklerine malik olmalıdır.

Bu özeliklere malik olan bir V bölgesine ***düzgün bölge*** denir.

İHTAR 1. İki katlı integrallerde olduğu gibi üç katlı integrallerin hesabı da, değişkenlere göre muhtelif sıralarda yapılabilir.

İHTAR 2. $f(x, y, z) \equiv 1$ ise

$$\Sigma f(P_i)\, \Delta V_i = \Sigma\, \Delta V_i$$

olarak üç katlı integral, V bölgesinin hacmını verir. Buna göre

$$V = \iiint\limits_V dx\, dy\, dz$$

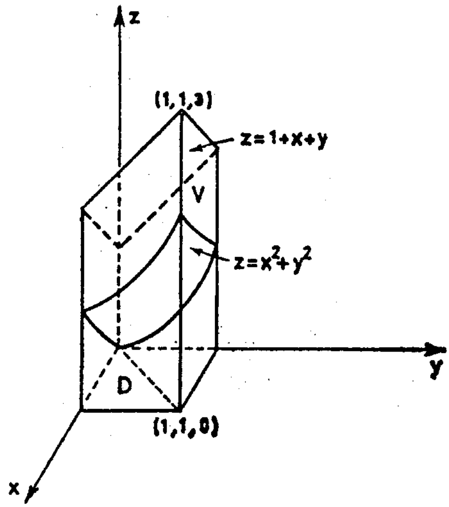
dir.

İHTAR 3. İki katlı integraller için söylenmiş olan özelikler üç katlı integraller için de söylenebilir.

ÖRNEK 1. V bölgesi, köşeleri $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ olan kareyi taban kabul eden prizmanın, $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin üstünde ve $z = 1 + x + y$ düzleminin altında kalan kısmı olduğuna göre

$$\iiint_V xy \, dx \, dy \, dz$$

üç katlı integralini hesaplayınız.



Şekil 240

V bölgesi Şekil 240 da gösterilmiştir. Buna göre,

$$\iiint_V xy \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \left[\int_0^1 \left(\int_{x^2+y^2}^{1+x+y} xy \, dz \right) dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 xy\,(1 + x + y - x^2 - y^2)\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left| \frac{1}{2} xy^2 + \frac{1}{2} x^2y^2 + \frac{1}{3} xy^3 - \frac{1}{2} x^3y^2 - \frac{1}{4} xy^4 \right|_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{7}{12} x \right) dx$$

$$= \frac{1}{3}$$

dir.

ÖRNEK 2.

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

$$x^2 + y^2 - ax = 0$$

yüzeylerinin sınırladığı hacmı hesaplayınız.

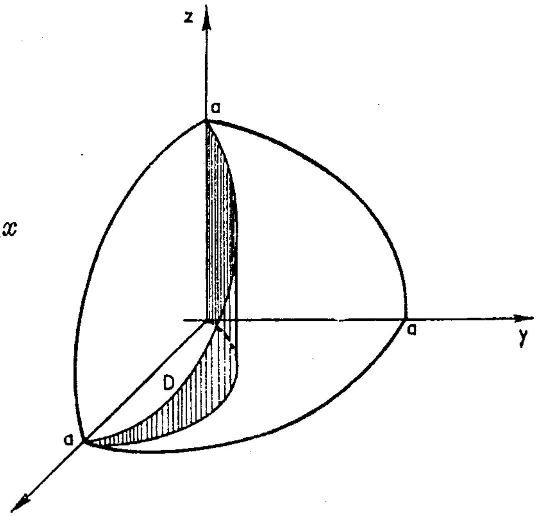
Hesaplanması istenen hacmın dörtte biri Şekil 241 de gösterilmiştir. Buna göre

$$V = 4\iiint\limits_V dx\,dy\,dz$$

$$V = 4\iint\limits_D\left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz\right)dy\,dx$$

$$V = 4\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\;dy\,dx$$

olup bunu da kutupsal koordinatlara dönüştürürsek, denklemi $x^2 + y^2 - ax = 0$ olan D bölgesinin kutupsal denklemi



Şekil 241

$$\rho = a\cos\theta$$

olarak

$$V = 4\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\right)d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\left|-\frac{1}{3}(a^2-\rho^2)^{3/2}\right|_0^{a\cos\theta} d\theta$$

$$= -\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\left[(a^2 - a^2\cos^2\theta)^{3/2} - a^3\right]d\theta$$

$$= -\frac{4a^3}{3}\int_0^{\pi/2}(\sin^3\theta - 1)\,d\theta$$

$$= \frac{2\,a^3}{9}(3\pi - 4)$$

dır.

23.2 - 3. Üç katlı integrallerde değişken değiştirme.

1. Genel hal.

$$x = x(u, v, w) \quad , \quad y = y(u, v, w) \quad , \quad z = z(u, v, w)$$

fonksiyonlarının, V bölgesindeki x, y, z koordinatlarını V' bölgesindeki u, v, w eğrisel koordinatları cinsinden bire bir olarak gösterdiğini kabul edelim. V bölgesindeki ΔV hacım elemanına, V' bölgesinde $\Delta V'$ hacım elemanı karşılık gelsin ve

$$\lim_{\Delta V' \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta V'} = |J|$$

olsun. Bu takdirde

$$\boxed{\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{V'} f[x(u,v,w); y(u,v,w); z(u,v,w)]\, |J|\, du\, dv\, dw}$$

dir. İki katlı integralde olduğu gibi J ye *dönüştürme jakobieni* denir. Bu jakobien aşağıdaki şekilde bir determinanta eşittir :

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

II. Silindirik koordinatlara dönüştürme.

Uzaydaki bir P noktasının xoy düzlemindeki izdüşümünün θ, ρ kutupsal koordinatları ile bu noktanın xoy düzlemine uzaklığı (nokta xoy nin üst tarafında ise $+$; alt tarafında ise $-$ alınmak üzere) olan z in bu noktanın *silindirik koordinatlarını* oluşturdukla-

rını biliyoruz. (Bak. Cilt 2;19.1-2) Şekil 242. ρ, θ, z verildiği takdirde nokta belirlidir. Kartezyen koordinatlarla silindirik koordinatlar arasındaki bağıntılar

$$x = \rho\cos\theta\,,\ y = \rho\sin\theta\,,\ z = z$$

olup

$$\iiint_V f(x\,,y\,,z)\,dx\,dy\,dz$$

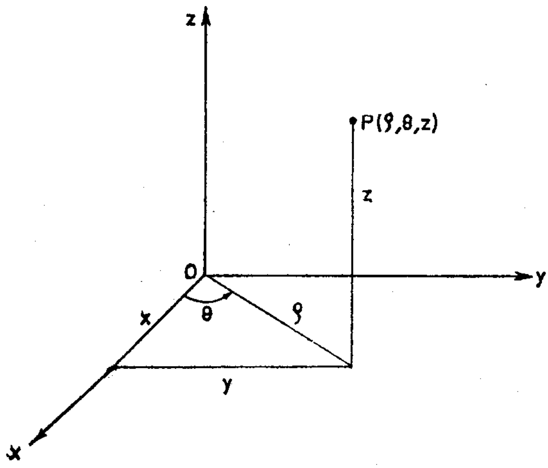
integrali silindirik koordinatlara dönüştürülmek istenirse,

$$u = \rho\,,\ v = \theta\,,\ w = z$$

kabul edilir. Bu takdirde

$$J = \frac{D(x\,,y\,,z)}{D(\rho\,,\theta\,,z)}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$



Şekil 242

olup

$$\boxed{\iiint_V f(x\,,y\,,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_V f[\rho\cos\theta\,,\rho\sin\theta\,,z]\,\rho\,d\rho\,d\theta\,dz}$$

olacaktır.

Bu halde $\Delta V'$ hacım elemanları, hacmı

$$\Delta V' = \rho\,\Delta\theta\,\Delta\rho\,\Delta z$$

ve boyutları $\rho\,\Delta\theta\,,\Delta\rho\,,\Delta z$ olan eğrisel prizmalar olacaktır. Şekil 243

III. Küresel koordinatlara dönüştürme.

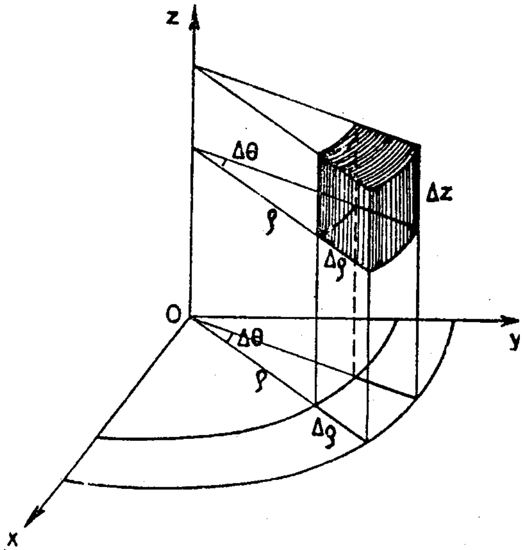
Uzaydaki bir P noktasının durumu, küresel koordinatlar adı verilen r, θ, φ sayıları ile belirli kılınabilir. Buradaki r, noktanın ori-

jine uzaklığı; φ, bu uzaklığın doğrultusu ile oz ekseni arasındaki açı ve θ ise OP doğrultusunun xoy üzerindeki izdüşümünün ox ekseni ile teşkil ettiği trigonometrik yöndeki açıdır. Şekil 244. Buna göre uzaydaki her nokta için

$$0 < r < \infty$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$



Şekil 243

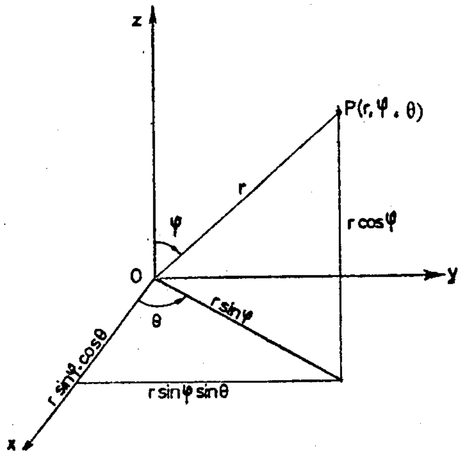
dir. Kartezyen koordinatlarla küresel koordinatlar arasındaki bağıntılar

$$x = r \sin\varphi \cos\theta \, ; \; y = r \sin\varphi \sin\theta ,$$

$$z = r \cos\varphi$$

olup $\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ integralinin küresel koordinatlara dönüştürülmesinin istenmesi halinde

$$u = r \quad , \quad v = \varphi \quad , \quad w = \theta$$



Şekil 244

kabul edilir ve

$$J = \frac{D(x\,,y\,,z)}{D(r\,,\varphi\,,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$J = r^2 \sin\varphi$$

olduğu gözönüne alınırsa

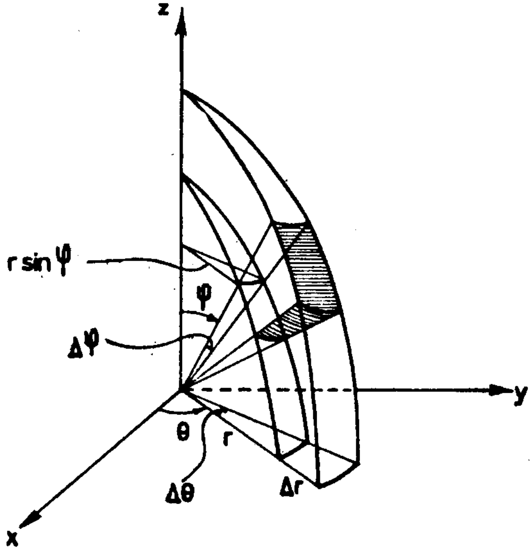
$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_V f[r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi]\,r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

bulunur.

Buradaki ΔV hacım elemanı, kenarları Δr, $r\,\Delta\varphi$, $r\sin\varphi\Delta\theta$ olan bir paralel yüzlü olarak düşünülebilir.

$$\Delta V = r^2 \sin\varphi\, \Delta r\, \Delta\varphi\, \Delta\theta$$

Bu şekildeki hacım elemanları, verilmiş V bölgesini $r = \text{st}$ (küreler), $\varphi = \text{st}$ (tepeleri orijinde olan koniler), $\theta = \text{st}$ (oz ekseninden geçen yarı düzlemler) yüzeyleri ile bölmek suretile elde edilir. Şekil 245.



Şekil 245

ÖRNEK 1. $x^2 + y^2 = ay$ silindiri ile $x^2 + y^2 + az = a^2$ paraboloidinin birinci bölgede sınırladığı ortak hacmi hesaplayınız.

Hesaplanması istenen hacım Şekil 246 da gösterilmiştir.

$$V = \iiint_V dx\,dy\,dz$$

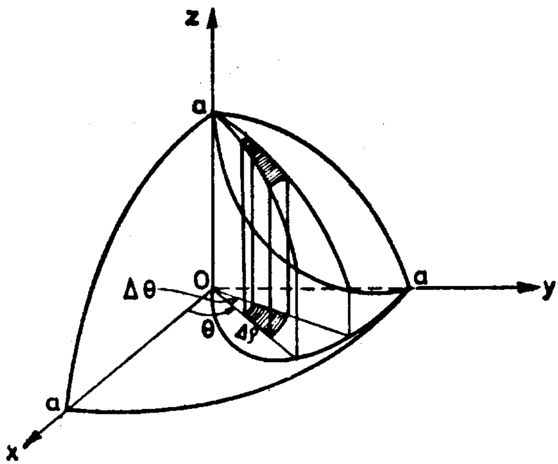
olup integrali silindirik koordinatlara dönüştürelim. Bu takdirde $x^2 + y^2 = ay$ silindirinin denklemi

$$\rho = a\sin\theta$$

ve $x^2 + y^2 + az = a^2$ paraboloidinin denklemi de

$$\rho^2 + az = a^2$$

şeklini alır. Buna göre



Şekil 246

$$V = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{a \sin \theta} \left(\int_0^{\frac{a^2 - \rho^2}{a}} \rho \, dz \right) d\rho \right] d\theta$$

$$V = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{a \sin \theta} \left| z \right|_0^{\frac{a^2 - \rho^2}{a}} \rho \, d\rho \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{a \sin \theta} (a^2 - \rho^2) \, \rho \, d\rho \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^{\pi/2} \left| - \frac{1}{4} (a^2 - \rho^2)^2 \right|_0^{a \sin \theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{4a} \int_0^{\pi/2} a^4 (1 - \cos^4 \theta) \, d\theta$$

$$= \frac{a^3}{4} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^4 \theta) \, d\theta = \frac{5\pi a^3}{64}$$

bulunur.

ÖRNEK 2. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ küresi ile $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin sınırladığı hacmı hesaplayınız.

Şekil 247 aranan hacmın dörtte birini göstermektedir. Bu takdirde

$$\frac{1}{4} V = \iiint_V dx \, dy \, dz$$

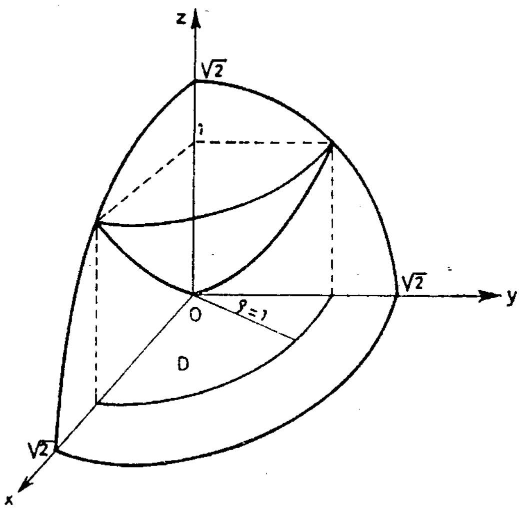
dir. Silindirik koordinatlara geçersek, $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ küresinin denklemi

$$\rho^2 + z^2 = 2$$

ve $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin denklemi de

$$z = \rho^2$$

şeklini alır. Buna göre



Şekil 247

$$\frac{1}{4} V = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho \left(\sqrt{2-\rho^2} - \rho^2\right) d\rho \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left| -\frac{1}{3}(2-\rho^2)^{3/2} - \frac{1}{4}\rho^4 \right|_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) d\theta$$

$$= \frac{\pi}{24}(8\sqrt{2} - 7)$$

ve

$$V = \frac{\pi}{6}(8\sqrt{2} - 7)$$

bulunur.

ÖRNEK 3. V bölgesi, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresi ile $z^2 = x^2 + y^2$ konisinin sınırladığı bölge olduğuna göre

$$\iiint_V (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$$

integralini hesaplayınız.

V bölgesinin birinci bölgedeki kısmı Şekil 248 de gösterilmiştir.

Bu integrali hesaplamak için küresel koordinatlara geçmek istersek

$$x = r \sin \varphi \cos \theta$$

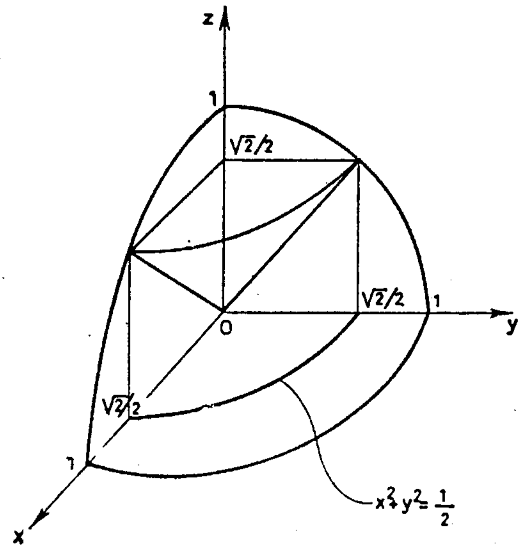
$$y = r \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = r \cos \varphi$$

değişken değiştirmelerini yapmak gerekir. Bu takdirde

$$J = r^2 \sin \varphi$$

olarak



Şekil 248

$$\iiint_V (x^2 + y^2)dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 (r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta)\, r^2\sin\varphi\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/4}\sin^3\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_0^1 r^4\, dr\right) = \frac{\pi(4\sqrt{2}-5)}{15\sqrt{2}}$$

bulunur.

ÖRNEK 4. V bölgesi $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ $(b < a)$ kürelerinin sınırladığı ortak bölge olduğuna göre

$$\iiint_V \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

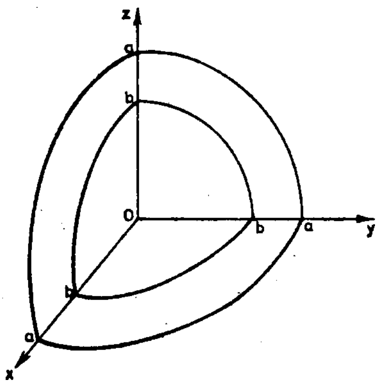
integralini hesaplayınız.

Şekil 249, V bölgesinin birinci bölgedeki kısmını göstermektedir. İntegrali hesaplamak için küresel koordinatlara geçersek,

$$x = r\sin\varphi\cos\theta$$

$$y = r\sin\varphi\sin\theta$$

$$z = r\cos\varphi$$



Şekil 249

ve $J = r^2\sin\varphi$ olarak

$$\iiint_V \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \iiint_V \frac{r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta}{r}$$

$$= \iiint_V r\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_b^a r\, dr\right)$$

$$= 2\pi(a^2 - b^2)$$

bulunur.

23.2 - 4. Üç katlı integrale ait diğer uygulamalar.

1. *Yoğunluğu* $f(x, y, z)$ *olan bir cismin kütlesi.*

$$\boxed{M = \iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}$$

dir.

2. *Bir cismin eylemsizlik momenti.*

ox eksenine göre eylemsizlik momenti :

$$\boxed{I_{ox} = \iiint_V (y^2 + z^2)\, f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}$$

oy eksenine göre eylemsizlik momenti :

$$\boxed{I_{oy} = \iiint_V (x^2 + z^2)\, f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}$$

oz eksenine göre eylemsizlik momenti :

$$\boxed{I_{oz} = \iiint_V (x^2 + y^2)\, f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz} \;;$$

xoy düzlemine göre eylemsizlik momenti :

$$\boxed{I_{xoy} = \iiint_V z^2\, f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz} \;;$$

zox düzlemine göre eylemsizlik momenti :

$$\boxed{I_{zox} = \iiint_V y^2\, f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz} \;;$$

yoz düzlemine göre eylemsizlik momenti :

$$\boxed{I_{yoz} = \iiint_V x^2\, f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}$$

dir.

3. Bir cismin ağırlık merkezi.

Yoğunluğu $f(x, y, z)$ olan bir cismin ağırlık merkezinin koordinatları :

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_V x\, f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint\limits_V y\, f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint\limits_V z\, f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}$$

dir.

ÖRNEK 1. Herhangibir noktasındaki yoğunluğu, eksene uzaklığı ile orantılı olan bir dik koninin kütlesini hesaplayınız. Koninin yüksekliği h, taban yarıçapı a ve orantı sabiti k olarak verilmektedir.

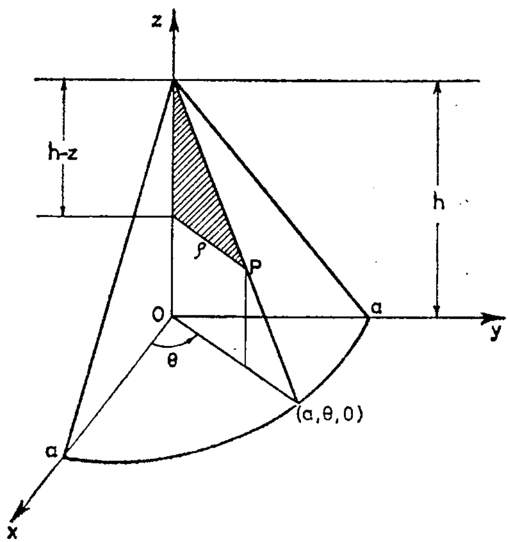
Koninin dörtte biri Şekil 250 de gösterilmiştir. Bu suretle oz ekseni koninin ekseni olarak alınmıştır. Bir $P(x, y, z)$ noktasının oz eksenine uzaklığı $\sqrt{x^2 + y^2}$ olup herhangibir noktadaki yoğunluk

$$f(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$$

dir. Buna göre cismin kütlesi

$$M = \iiint\limits_V k\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz$$

olur. Silindirik koordinatlarda



Şekil 250

hesap yapmak üzere, koninin silindirik koordinatlardaki denklemini yazalım. Şekil 250 den

$$\frac{\rho}{h-z}=\frac{a}{h}$$

yazılarak $\rho = \frac{a}{h}(h-z)$ olduğu kolayca görülür.

Buna göre

$$M=\iiint_V k\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz=\int_0^h\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{a}{h}(h-z)}k\,\rho.\rho\,d\rho\,d\theta\,dz$$

$$=k\int_0^h\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\,\frac{a^3}{h^3}(h-z)^3\,d\theta\,dz$$

$$=\frac{2\pi k}{3}\int_0^h\frac{a^3}{h^3}(h-z)^3\,dz$$

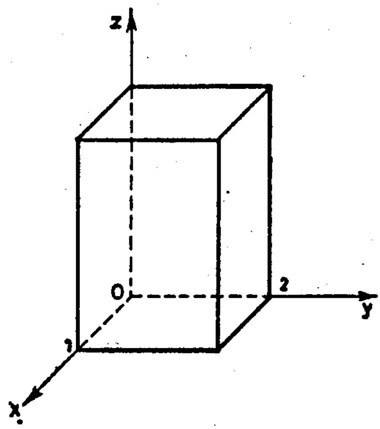
$$=\frac{\pi k a^3 h}{6}$$

dır.

ÖRNEK 2. Yoğunluğu

$$f(x,y,z)=x^3y^2z$$

ve bir köşesi orijinde ve boyutları 1,2,3 olan dik dörtgenler prizması şeklindeki bir cismin ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.



Şekil 251

$$\iiint_V x^3y^2z\,dx\,dy\,dz=\int_0^1\int_0^2\int_0^3 x^3y^2z\,dz\,dy\,dx=3$$

$$\iiint_V x\,(x^3y^2z)\,dx\,dy\,dz=\int_0^1\int_0^2\int_0^3 x^4y^2z\,dz\,dy\,dx=\frac{12}{5}$$

$$\iiint_V y(x^3y^2z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^2\int_0^3 x^3y^3z\,dz\,dy\,dx = \frac{9}{2}$$

$$\iiint_V z(x^3y^2z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^2\int_0^3 x^3y^2z^2\,dz\,dy\,dx = 6$$

olarak

$$\bar{x} = \frac{4}{5}\ ,\ \bar{y} = \frac{3}{2}\ ,\ \bar{z} = 2$$

bulunur.

İHTAR. Verilen cisim homojen ve yoğunluğu k ise ağırlık merkezinin koordinatlarının

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x\,dV}{V}\ ,\ \bar{y} = \frac{\iiint_V y\,dV}{V}$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_V z\,dV}{V}$$

olacağı kolayca görülür. Buradaki V cismin hacmı olup

$$V = \iiint_V dV$$

dir.

ÖRNEK 3. Örnek 1 de verilmiş olan koni homojen olduğuna göre ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.

$$\bar{x} = 0 \quad , \quad \bar{y} = 0$$

olduğu kolayca görülür.

$$\bar{z} = \frac{\iiint_V z\,dV}{V}$$

olup

$$V = \frac{1}{3}\pi a^2 h$$

dır.

$$\iiint_V z\, dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{h}(h-z)} zr\, dr\, d\theta\, dz$$

$$= \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2h^2} z(h-z)^2\, d\theta\, dz$$

$$= \frac{2\pi a^2}{h^2} \int_0^h z(h-z)^2\, dz$$

$$= \frac{\pi a^2}{h^2} \int_0^h (h^2 z - 2hz^2 + z^3)\, dz$$

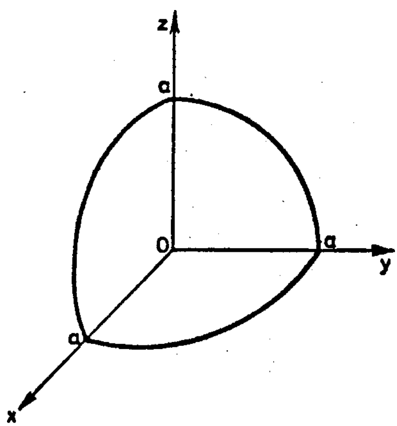
$$= \frac{\pi a^2}{h^2} \frac{h^4}{12} = \frac{\pi a^2 h^2}{12}$$

olarak

$$\bar{z} = \frac{\pi a^2 h^2/12}{\frac{1}{3}\pi a^2 h} = \frac{h}{4}$$

bulunur.

ÖRNEK 4. a yarıçaplı içi dolu yarım küre şeklindeki bir cismin ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz. Cismin herhangi bir noktasındaki yoğunluk, noktanın merkeze uzaklığı ile orantılıdır.



Şekil 252

Koordinat eksenlerini Şekil 252 de olduğu gibi seçersek, şekil cismin dörtte birini göstermiş olur. Buna göre

$$\bar{x} = 0 \quad , \quad \bar{y} = 0$$

olduğu kolayca görülebilir.

$$\bar{z} = \frac{\iiint_V z\, f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}$$

olup küresel koordinatlara dönüştürürsek

$$f(x,y,z) = kr \quad , \quad z = r\cos\varphi \quad , \quad J = r^2 \sin\varphi$$

olarak

$$\bar{z} = \frac{\iiint\limits_V r\cos\varphi\, kr\, r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta}{\iiint\limits_V kr \,.\, r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta}$$

olur. Bu kesrin payı

$$\iiint\limits_V kr^4 \cos\varphi \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta = k\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_0^a r^4\, dr\right)$$

$$= k \,.\, 2\pi \,.\left|\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right|_0^{\pi/2}\left|\frac{1}{5} r^5\right|_0^a$$

$$= \frac{1}{5}\pi k a^5$$

ve paydası

$$\iiint\limits_V kr^3 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta = k\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_0^a r^3\, dr\right)$$

$$= k \,.\, 2\pi \,.\left|-\cos\varphi\right|_0^{\pi/2}\left|\frac{r^4}{4}\right|_0^a$$

$$= \frac{1}{2}\pi k a^4$$

olarak

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{5}\pi k a^5}{\frac{1}{2}\pi k a^4} = \frac{2a}{5}$$

bulunur. Buna göre ağırlık merkezi $(0, 0, \frac{2a}{5})$ noktasıdır.

23. BÖLÜME AİT PROBLEMLER.

İKİ KATLI İNTEGRAL

Aşağıdaki iki katlı integralleri hesaplayınız,

1) $\int_0^2 \int_0^{x^2} y \, dy \, dx$ Cevap. $\frac{16}{5}$

2) $\int_0^a \int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} y \, dy \, dx$ Cevap. $\frac{a^3}{6}$

3) $\int_0^1 \int_1^2 (x+2) \, dy \, dx$ Cevap. $\frac{5}{2}$

4) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} \, dy \, dx$ Cevap. $\frac{\pi a^3}{6}$

5) $\int_1^e \int_0^y \frac{dy \, dx}{x^2+y^2}$ Cevap. $\frac{\pi}{4}$

6) $\int_0^\pi \int_0^{\cos\theta} \rho \sin\theta \, d\rho \, d\theta$ Cevap. $\frac{1}{3}$

7) $\int_1^{\log 8} \int_0^{\log y} e^{x+y} \, dx \, dy$ Cevap. $8\log 8 - 16 + e$

8) D bölgesi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi ile $x^2 + y^2 = a^2$ çemberinin oy ekseni ile birinci bölgede sınırladıkları bölge olduğuna göre, $\iint_D xy \, dx \, dy$ integralini hesaplayınız.

Cevap. $-\frac{a^2(a^2-b^2)}{8}$

9) D bölgesi, $x^2 + y^2 = R^2$ çemberi ve $y^2 = 2Rx$ parabolunun ox ekseni ile birinci bölgede sınırladıkları bölge olduğuna göre $\iint_D x\sqrt{y} \, dx \, dy$ integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{8R^3\sqrt{R}}{77} [2(\sqrt{2}-1)]^{3/4} \cdot \left(\frac{10}{3} - 6\sqrt{2}\right)$

10) D bölgesi $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ elipsinin birinci bölgede koordinat eksenleri ile sınırladığı bölge olduğuna göre $\iint_D \sqrt{a^2-y^2}\,dx\,dy$ integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{2a^2 b}{3}$

11) D bölgesi, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ doğrusunun $x=0\,,\, y=0$ doğruları ile birinci bölgede sınırladıkları bölge olduğuna göre $\iint_D \sqrt{x+y}\,dx\,dy$ integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{4}{15}\,ab\,\frac{a^{3/2}-b^{3/2}}{a-b}$

12) D bölgesi, köşeleri $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ olan üçgen bölgesi olduğuna göre $\iint_D xy\,dx\,dy$ integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{1}{24}$

13) D bölgesi, ox ekseni, $y^2=2px$ parabolunun ox ekseninin üst tarafında kalan kısmı ve $x=a$ doğrusunun sınırladığı bölge olduğuna göre $\iint_D x\,dx\,dy$ integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{2}{5}\,a^2\sqrt{2pa}$

14) D bölgesi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsinin sınırladığı bölge olduğuna göre $\iint_D y^2\,dx\,dy$ integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{\pi ab^3}{4}$

15) D bölgesi, $y^2=2x$ parabolu ile $x=1$ doğrusunun sınırladığı bölge olduğuna göre $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{116\sqrt{2}}{105}$

16) D bölgesi, $x+y=1$ doğrusunun koordinat eksenleri ile birinci bölgede sınırladığı bölge olduğuna göre $\iint\limits_D x^2y\,dx\,dy$ integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{1}{60}$

17) D bölgesi $y=x^2$ ve $y^2=x$ parabollerinin sınırladığı bölge olduğuna göre $\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$ integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{3}{10}$

18) D bölgesi $x^2+y^2=4$ çemberinin sınırladığı bölge olduğuna göre $\iint\limits_D (2-x)\,dx\,dy$ integralini hesaplayınız.

Cevap. 8π

19) D bölgesi, $xy=6$ ve $x+y=5$ eğrilerinin sınırladığı bölge olduğuna göre $\iint\limits_D dx\,dy$ integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{5}{2}+6\log\frac{2}{3}$

20) D bölgesi $x^2+y^2=25$ çemberinin sınırladığı bölge olduğuna göre $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{625\pi}{2}$

21) D bölgesi $y=\sqrt{1-x^2}$ eğrisi ile $y=0$ doğrusunun sınırladığı bölge olduğuna göre $\iint\limits_D (4-x^2-y^2)\,dx\,dy$ integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{7\pi}{4}$

Aşağıdaki integralleri doğrudan doğruya ve integral sırasını değiştirmek suretiyle hesaplayınız.

22) $\int_0^4\left(\int_0^{x^2/2} x\,dy\right)dx$ Cevap. $\int_0^8\left(\int_{\sqrt{2y}}^4 x\,dx\right)dy=32$

23) $\int_0^3 \left(\int_{y^2}^{3y} x \, dx \right) dy$ Cevap. $\int_0^9 \left(\int_{x/3}^{\sqrt{x}} x \, dy \right) dx = \frac{81}{5}$

24) $\int_0^4 \left(\int_{e^{-x}}^{1} y \, dy \right) dx$ Cevap. $\int_{e^{-4}}^{1} \left(\int_{-\log y}^{4} y \, dx \right) dy = \frac{1}{4} (7 + e^{-8})$

25) $\int_0^1 \left(\int_{2-2x^2}^{2} xy \, dy \right) dx$ Cevap. $\int_0^2 \left(\int_{\sqrt{1-\frac{1}{2}y}}^{1} xy \, dx \right) dy = \frac{2}{3}$

26) $\int_1^{e^2} \left(\int_0^{\log x} 2x \, dy \right) dx$ Cevap. $\int_0^2 \left(\int_{e^y}^{e^2} 2x \, dx \right) dy = \frac{1}{2} (3e^4 + 1)$

27) $\int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} y \, dx \right) dy$ Cevap. $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} y \, dy \right) dx = \frac{1}{15}$

28) $\int_0^1 \left(\int_x^1 e^x \, dy \right) dx$ Cevap. $\int_0^1 \left(\int_0^y e^x \, dx \right) dy = e - 2$

Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

29) $\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2} \, dx \right) dy$ Cevap. $\frac{1}{2} (e - 1)$

30) $\int_0^1 \left(\int_y^1 \frac{\sin x}{x} \, dx \right) dy$ Cevap. $1 - \cos 1$

31) $\int_0^1 \left(\int_y^1 \sin x^2 \, dx \right) dy$ Cevap. $\frac{1}{2} (1 - \cos 1)$

32) $\int_0^1 \left(\int_y^1 \frac{\cos x}{x} \, dx \right) dy$ Cevap. $\sin 1$

Aşağıdaki integralleri kutupsal koordinatlara dönüştürerek hesaplayınız.

33) $\int_0^1 \int_{\sqrt{3}\,y}^{\sqrt{4-y^2}} \cos (x^2 + y^2) \, dx \, dy$ Cevap. $\frac{\pi}{12} \sin 4$

34) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} (x^2 + y^2) \, dx \, dy$ Cevap. $\frac{3\pi}{4}$

35) $\int_0^{\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{4-y^2}} x^2\,dx\,dy$ Cevap. $\frac{\pi}{2}+1$

36) $\int_0^{2a}\int_{-\sqrt{2ay-y^2}}^{0} (-x)dx\,dy$ Cevap. $\frac{2}{3}a^3$

37) $\int_0^{2\sqrt{3}}\int_{y/\sqrt{3}}^{\sqrt{16-y^2}} x^2\,dx\,dy$ Cevap. $\frac{32\pi}{3}+8\sqrt{3}$

38) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ Cevap. $\frac{\pi(e-1)}{4e}$

39) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\,dy\,dx$ Cevap. $\frac{1}{4}\pi(e-1)$

40) $\int_0^1\int_y^1 \frac{x^6\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$ Cevap. $\frac{5\sqrt{2}}{36}$

41) $\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x^2\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$ Cevap. $\frac{\pi a^5}{20}$

42) D bölgesi, a çaplı ve merkezi $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ olan bir yarım daire olduğuna göre $\iint_D y\,dx\,dy$ integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{a^3}{12}$

43) D bölgesi $x^2+y^2=2ax$ çemberinin sınırladığı bölge olduğuna göre $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{3}{2}\pi a^4$

44) D bölgesi a yarıçaplı, merkezi orijinde ve ox ekseninin üst tarafında kalan yarım daire olduğuna göre

$$\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{\pi a^3}{3}$

ALAN VE HACIM HESABI

45) $y = x^2$ ve $y = 8 - x^2$ eğrilerinin sınırladığı alanı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{64}{3}$

46) $y = x^{1/2}$ ve $y = x^{3/2}$ eğrilerinin, birinci bölgede sınırladıkları alanı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{4}{15}$

47) $4x = 8 - y^2$ ve $4x = y^2$ eğrilerinin, birinci bölgede sınırladıkları alanı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{8}{3}$

48) $3y^2 = 25x$ ve $5x^2 = 9y$ parabollerinin sınırladığı alanı hesaplayınız.

Cevap. 5

49) $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ ve $x + y = a$ eğrilerinin sınırladığı alanı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{a^2}{3}$

50) $y = \sin x$, $y = \cos x$ ve $x = 0$ eğrilerinin sınırladığı alanı hesaplayınız.

Cevap. $\sqrt{2} - 1$

51) $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$, $2y = x$, $x = 0$ eğrilerinin sınırladığı alanı hesaplayınız.

Cevap. $(\pi - 1)\, a^2$

52) $x = y$, $x = 2y$, $x + y = a$, $x + 3y = a$ $(a > 0)$ doğrularının sınırladığı alanı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{7a^2}{120}$

53) $y^2 = 4ax$ parabolu ile $x + y = 3a$ doğrusunun ox ekseninin üst tarafında, ox ile sınırladıkları alanı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{10}{3}\, a^2$

54) $(y-x)^2+x^2=1$ elipsinin sınırladığı alanı hesaplayınız.

Cevap. π.

55) $y^2=10x+25$ ve $y^2=-6x+9$ parabollerinin sınırladığı alanı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{16}{3}\sqrt{15}$

56) $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $y=x$ ve $y=0$ eğrilerinin sınırladığı alanı hesaplayınız. (kutupsal koordinatlara dönüştürünüz.)

Cevap. $3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$

57) $\rho=a(1+\cos\theta)$ eğrisinin sınırladığı alanı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{3}{2}\pi a^2$

58) $\rho=2\cos\theta+3$ ve $\rho=2\cos\theta$ eğrilerinin sınırladığı alanı hesaplayınız.

Cevap. 10π

59) $\rho^2=2a^2\cos 2\theta$ ve $\rho=2a\sin\theta$ eğrilerinin birinci bölgede sınırladıkları alanı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{a^2}{6}(\pi+3-3\sqrt{3})$

60 $z=x^2+y^2$, $x+y=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ yüzeylerinin sınırladığı hacmı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{8}{3}$

61 $x^2+y^2=4$ silindiri ile $z=2x$ ve $z=0$ düzlemlerinin sınırladığı hacmı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{64}{3}$

62 $x=0$, $y=0$, $z=y$ düzlemleri ile $y^2=4-x$ silindirinin, birinci bölgede sınırladığı hacmı hesaplayınız.

Cevap. 4

63 $x+2y=2$ düzlemi ile $x^2+4y^2+z=4$ paraboloidi ve $z=0$ düzlemi nin birinci bölgede sınırladıkları hacmı hesaplayınız.

Cevap. $\pi - \frac{8}{3}$

64 $z=x^2+y^2$, $x=1$, $z=0$ ve $x+y=3$ yüzeylerinin sınırladıkları hacmı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{11}{6}$

65) $2z=xy$, $x^2=8y$, $x-y=2$, $z=0$ yüzeylerinin birinci bölgede sınırladıkları hacmi hesaplayınız.

Cevap. $\frac{1}{3}$

66) $z=0$, $z=x$ ve $y^2=2-x$ yüzeylerinin sınırladıkları hacmı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{32\sqrt{2}}{15}$

67) $x=0$, $z=0$, $y^2=4-x$ ve $z=y+2$ yüzeylerinin sınırladığı hacmı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{64}{3}$

68) $y^2=z$, $y=z^3$, $z=x$ ve $y^2=2-x$ yüzeylerinin sınırladıkları hacmı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{8}{15}$

69) $y=x^2$ ve $z^2=4-y$ yüzeylerinin sınırladıkları hacmı hesaplayınız.

Cevap. 8π

70) $x^2=y+z$, $y=0$, $z=0$ ve $x=2$ yüzeylerinin sınırladığı hacmı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{16}{5}$

71) $z=2x^2+y^2+1$ eliptik paraboloidi ve $x+y=1$ düzleminin koordinat düzlemleri ile sınırladıkları hacmı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{3}{4}$

72) $az = y^2$, $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ yüzeylerinin sınırladıkları hacmı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{\pi R^4}{4a}$

73) $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$ yüzeylerinin sınırladıkları hacmı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{88}{105}$

74) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = \frac{b}{a} x$, $y = 0$, $z = 0$ yüzeylerinin sınırladıkları hacmı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{abc}{3}$

75) $x^2 + y^2 = a^2$ silindiri ile $x^2 + y^2 - z^2 = - a^2$ hiperboloidinin sınırladığı hacmı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{4}{3} \pi a^3 \, (2\sqrt{2} - 1)$

76) $2(x^2 + y^2) - z^2 = 0$ konisi ile $x^2 + y^2 - z^2 = - a^2$ hiperboloidinin sınırladığı hacmı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{4}{3} \pi a^3 (\sqrt{2} - 1)$

77) $2az = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, $z = 0$ yüzeylerinin sınırladıkları hacmı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{\pi a^3}{3}$

78) $2az = x^2 + y^2$ paraboloidi ile $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ küresinin sınırladığı hacmı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{\pi a^3}{3} (6\sqrt{3} - 5)$

79) $x^2 + y^2 = 2ax$ silindiri ve $x^2 + y^2 = z^2$ konisinin xoy düzlemi ile sınırladıkları hacmı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{32}{9} a^3$

80) $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, paraboloidi, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{x}{a}$ silindiri ve xoy düzleminin sınırladığı hacmı hesaplayınız.

Cevap. $\frac{3\pi ab}{2}$

DEĞİŞKEN DÖNÜŞTÜRMELER.

81) D bölgesi $y = x + 1, y = x - 3, y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}, y = -\frac{1}{3}x + 5$ doğrularının sınırladığı bölge olduğuna göre

$$\iint_D (y - x)\, dx\, dy$$

integralini hesaplayınız.

Cevap. -8

82) D bölgesi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi olduğuna göre

$$\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx\, dy$$

integralini hesaplayınız. ($x = au, y = bv$ dönüştürmesini yapınız)

Cevap. $\frac{\pi ab}{2}$

83) D bölgesi $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 16$ eğrilerinin sınırladığı bölge olduğuna göre

$$\iint_D x\, y\, dx\, dy$$

integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{21}{8}$

84) D bölgesi $x = -y^2, x = 2y - y^2, x = 2 - y^2 - 2y$ eğrilerinin sınırladığı bölge olduğuna göre

$$\iint_D x \, dx \, dy$$

integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{1}{48}$

85) D bölgesi $x(1-y) = 1, x(1-y) = 2, xy = 1$, $xy = 3$ eğrilerinin sınırladığı bölge olduğuna göre

$$\iint_D x \, dx \, dy$$

integralini hesaplayınız.

Cevap. 2

86) D bölgesi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi olduğuna göre

$$\iint_D (x^2 - y^2) \, dx \, dy$$

integralini hesaplayınız.

87) D bölgesi, köşeleri $(1, 0), (2, 1), (1, 2)$ ve $(0, 1)$ olan kare olduğuna göre

$$\iint_D (x^2 - y^2)^2 \, dx \, dy$$

integralini hesaplayınız,

88) D bölgesi, köşeleri $(\pi, 0), (3\pi, \pi), (2\pi, 2\pi), (0, \pi)$ olan paralelkenar olduğuna göre

$$\iint_D (x - 2y) \sin^2 (x + y) \, dx \, dy$$

integralini hesaplayınız.

89) D bölgesi, $x + y = \pi, x + y = 3\pi, x - y = \pi, x - y = -\pi$ doğrularının sınırladığı bölge olduğuna göre

$$\iint_D (x - y)^2 \sin^2 (x + y) \, dx \, dy$$

integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{\pi^4}{3}$

90) D bölgesi $y = 3x$, $x = 3y$, $x + y = 4$ doğrularının sınırladığı bölge olduğuna göre

$$\iint_D x^2 \, dx \, dy$$

integralini hesaplayınız,

91) D bölgesi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi olduğuna göre

$$\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx \, dy$$

integralini hesaplayınız. ($x = a \rho \cos \theta$, $y = b \rho \sin \theta$ dönüştürmesini yapınız)

Cevap. $\frac{2\pi ab}{3}$

92) D bölgesi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin birinci bölgedeki kısmı olduğuna göre

$$\iint_D x \, y \, dx \, dy$$

integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{a^2 b^2}{8}$

93) D bölgesi $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 2$, $2xy = 2$, $2xy = 4$ eğrilerinin birinci bölgede sınırladıkları bölge olduğuna göre

$$\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{1}{2}$

YÜZEY ALANLARI.

94) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ düzleminin koordinat düzlemleri arasında kalan kısmının alanını hesaplayınız.

Cevap. $\frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}$.

95) $x^2 + y^2 = R^2$ $(z \geqq 0)$ silindirinin $z = mx$ ve $z = nx$ düzlemleri arasında kalan kısmının alanını hesaplayınız. $(m > n > 0)$

Cevap. $4(m - n)R^2$

96) $x^2 + y^2 = ax$ silindir yüzeyinin $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresi tarafından ayrılan kısmının alanını hesaplayınız.

Cevap. $4a^2$

97) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küre yüzeyinın $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ silindiri tarafından kesilen kısmının alanını hesaplayınız.

Cevap. $8a^2 \arcsin \frac{b}{a}$

98) $y^2 + z^2 = 2ax$ paraboloidinin $y^2 = ax$ silindiri ile $x = a$ düzlemi arasında kalan kısmının alanını hesaplayınız.

Cevap. $\frac{1}{3}\pi a^2 (3\sqrt{3} - 1)$

99) $x^2 + y^2 = 2ax$ silindir yüzeyinin $x^2 + y^2 = z^2$ konisi ile xoy düzlemi arasında kalan kısmının alanını hesaplayınız.

Cevap. $8a^2$

100) $x^2 - y^2 = z^2$ koni yüzeyinin $x^2 + y^2 = 2ax$ silindiri içinde kalan kısmının alanını hesaplayınız.

Cevap. $3\pi a^2$

101) $z^2 = x^2 + y^2$ koni yüzeyinin $x^2 + y^2 = 2x$ silindirinin içinde kalan kısmının alanını bulunuz.

Cevap. $2\sqrt{2}\pi$

102) $x^2 = y^2 + z^2$ koni yüzeyinin $y^2 = z$ silindiri ile $y = z - 2$ düzlemi arasında kalan kısmının alanını hesaplayınız.

Cevap. $9\sqrt{2}$

103) $x^2 = y^2 + z^2$ koni yüzeyinin $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ küresi içinde kalan kısmının alanını hesaplayınız.

Cevap. $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

104) $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 16$ küresinin $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ konisi tarafından kesilen kısmının alanını hesaplayınız.

Cevap. 16π

EYLEMSİZLİK MOMENTİ VE AĞIRLIK MERKEZİ.

105) $y = 0$, $y = 4 - x^2$ eğrilerinin sınırladığı plak cismin ox eksenine göre eylemsizlik momentini bulunuz. (yoğunluk = sabit = γ)

Cevap. $I_{ox} = \dfrac{4096}{105}\gamma$

106) Köşeleri $(0, 0), (a, 0), (a, a), (0, a)$ olan karenin oy eksenine göre eylemsizlik momentini bulunuz. (yoğunluk = sabit)

Cevap. $I_{oy} = \dfrac{Ma^2}{3}$ (M = kütle)

107) $y = \sqrt{x}$ ve $y = x^2$ eğrilerinin sınırladığı homojen düzlem şeklin oy eksenine göre eylemsizlik momentini bulunuz.

Cevap. $I_{oy} = \dfrac{9M}{35}$

108) $y = 0$ ve $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ eğrilerinin sınırladığı düzlem şeklin ox eksenine göre eylemsizlik momentini bulunuz. Yüzeysel yoğunluk $= ky$

Cevap. $I_{ox} = \dfrac{2Ma^2}{5}$

109) $y = x^2$ ve $y = x + 2$ eğrilerinin sınırladığı düzlem şeklin ox eksenine göre eylemsizlik momentini bulunuz. (Yoğunluk = sabit)

Cevap. $I_{ox} = \dfrac{47M}{14}$

110) $y = x^2$ ve $y^2 = x$ eğrilerinin sınırladığı düzlem şeklin oy eksenine göre eylemsizlik momentini bulunuz. Yoğunluk $= ky$

Cevap. $I_{oy} = \dfrac{5M}{14}$

111) $x^2 + y^2 = a^2$ dairesinin ox eksenine göre eylemsizlik momentini bulunuz. Yoğunluk $= k\sqrt{x^2 + y^2}$

Cevap. $\dfrac{3Ma^2}{10}$

112) $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ eğrisinin bir halkasının kutba nazaran eylemsizlik momentini bulunuz. (Yoğunluk = sabit)

Cevap. $I_0 = \frac{\pi M a^2}{8}$

113) $y = x^3$ ve $y = \sqrt{x}$ eğrilerinin sınırladığı düzlem şeklin ağırlık merkezini bulunuz. Yoğunluk $= 3x$

Cevap. $\bar{x} = \frac{25}{42}$, $\bar{y} = \frac{25}{48}$

114) $y^2 = x$ ve $x = y + 2$ eğrilerinin sınırladığı düzlem şeklin ağırlık merkezini bulunuz. Yoğunluk $= kx$

Cevap. $\bar{x} = \frac{235}{112}$, $\bar{y} = \frac{25}{16}$

115) $y = x^2$ ve $y^2 = x$ eğrilerinin sınırladığı düzlem şeklin ağırlık merkezini bulunuz. Yoğunluk $= ky$

Cevap. $\bar{x} = \frac{5}{9}$, $\bar{y} = \frac{4}{7}$

116) Köşeleri $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, a), $(0, a)$ olan bir karenin ağırlık merkezini bulunuz. Yoğunluk $= k(x^2 + y^2)$

Cevap. $\bar{x} = \bar{y} = \frac{5a}{8}$

117) $\rho = 2(1 + \cos\theta)$ kardioidinin ağırlık merkezini bulunuz. Yoğunluk = sabit

Cevap. $\bar{x} = \frac{3\pi}{5}$, $\bar{y} = 0$

118) $3x^2 + 4y^2 = 48$ ve $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ eğrilerinin sınırladığı düzlem şeklin ağırlık merkezini bulunuz. (Yoğunluk = sabit)

Cevap. $\bar{x} = \frac{-2}{8\sqrt{3} - 1}$, $\bar{y} = 0$

ÜÇ KATLI İNTEGRALLER.

Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

119) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} x \, dz \, dy \, dx$ Cevap. $\frac{1}{8}$

120) $\displaystyle\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{+\sqrt{2x-x^2}} \int_{4-2x}^{4-x^2-y^2} dz\, dy\, dx$ Cevap. $\dfrac{\pi}{2}$

121) $\displaystyle\int_2^4 \int_{1/z}^{1} \int_0^{\sqrt{yz}} xyz\, dx\, dy\, dz$ Cevap. $\dfrac{28}{9} + \dfrac{1}{6} \log 0{,}5$

122) $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} \int_0^{y+z} xy\, dx\, dz\, dy$ Cevap. $\dfrac{109}{1008}$

123) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \int_0^{2-z} z\, dx\, dy\, dz$ Cevap. $\dfrac{16-3\pi}{3}$

124) V bölgesi $z=0\,,\, y=0\,,\, y=x\,,\, x+y=2\,,\, x+y+z=3$ düzlemlerinin sınırladığı bölge olduğuna göre

$$\iiint\limits_V x\, dx\, dy\, dz$$

integralini hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{3}{2}$

125) V bölgesi $x+y+z=1$ düzleminin koordinat düzlemleri ile sınırladığı bölge olduğuna göre

$$\iiint\limits_V \frac{dx\, dy\, dz}{(x+y+z+1)^3}$$

integralini hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{1}{2} \log 2 - \dfrac{5}{16}$

126) V bölgesi $x^2+y^2=2az$ ve $x^2+y^2+z^2=3a^2$ yüzeylerinin sınırladığı ortak bölge olduğuna göre

$$\iiint\limits_V (x+y+z)^2\, dx\, dy\, dz$$

integralini hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3} - \dfrac{97}{6}\right)$

127) V bölgesi $x^2+y^2+z^2=R^2$ ve $x^2+y^2+z^2=2\,Rz$ kürelerinin sınırladığı ortak bölge olduğuna göre

$$\iiint_V z^2\,dx\,dy\,dz$$

integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{59}{480}\pi R^5$

128) V bölgesi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ elipsoidinin $z=0$ düzleminin üstünde kalan kısmı olduğuna göre

$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$$

integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{\pi abc^2}{4}$

129) V bölgesi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ elipsiodinin içi olduğuna göre

$$\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dy\,dz$$

integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{4}{5}\pi abc$

130) V bölgesi $x^2+y^2+z^2=2Rz$ ve $x^2+y^2=z^2$ yüzeylerinin sınırladığı ve $(0\,,0\,,R)$ noktasını içeren bölge olduğuna göre

$$\iiint_V dx\,dy\,dz$$

integralini, silindirik koordinatlara geçerek hesaplayınız.

Cevap. πR^3

131) $$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\, dz$$

integralini, silindirik koordinatlara geçerek, hesaplayınız.

Cevap. $\frac{8}{9}a^2$

132) $$\int_0^{2a} dx \int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{+\sqrt{2ax-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} dz$$

integralini, silindirik koordinatlara geçerek, hesaplayınız

Cevap. $\frac{8}{3}a^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$

133) $$\int_{-R}^{+R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\, dz$$

integralini, küresel koordinatlara geçerek, hesaplayınız.

Cevap. $\frac{4}{15}\pi R^5$

134) V bölgesi $x^2+y^2+z^2=x$ küresinin içi olduğuna göre

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$$

integralini, küresel koordinatlara geçerek, hesaplayınız.

Cevap. $\frac{\pi}{10}$

HACIM HESABI.

135) $y^2=4a^2-3ax$, $y^2=ax$, $z=\pm h$ yüzeylerinin sınırladığı cismin hacmını hesaplayınız.

Cevap. $\frac{32}{9}a^2h$

136) $x^2+y^2=2ax$ silindirinin $x^2+y^2=2az$ paraboloidi ile xoy düzlemi arasında kalan kısmının hacmını hesaplayınız.

Cevap. $\frac{3}{4}\pi a^3$

137) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresi ile $z^2 = x^2 + y^2$ konisinin sınırladığı cismin hacmını hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}$

138) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresi ile $x^2 + y^2 = 3z$ paraboloidinin sınırladığı cismin hacmını hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{19}{6}\pi$

139) $x^2 + y^2 = ax$ silindiri, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresi ve xoy düzleminin sınırladığı cismin hacmını hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{a^3}{9}(3\pi - 4)$

140) $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 2\dfrac{x}{a}$ paraboloidi ile $x = a$ düzleminin sınırladığı cismin hacmını hesaplayınız.

Cevap. πabc

KÜTLE, AĞIRLIK MERKEZİ VE EYLEMSİZLİK MOMENTİ.

141) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = a$, $y = z$ düzlemlerinin sınırladığı cismin ox eksenine göre eylemsizlik momentini bulunuz. Yoğunluk $= kx$

Cevap. $I_{ox} = \dfrac{ka^6}{90}$

142) $z = x$, $y^2 = 4 - 2z$, $x = 0$ yüzeylerinin sınırladığı cismin oz eksenine göre eylemsizlik momentini bulunuz. (Yoğunluk = sabit $= \gamma$)

Cevap. $\dfrac{2944}{315}\gamma$

143) $z^2 = y^2(1 - x^2)$ yüzeyinin $y = 1$ düzlemi ile sınırladığı cismin ox eksenine göre eylemsizlik momentini bulunuz. (Yoğunluk $= st = \gamma$)

Cevap. $\dfrac{5\pi}{16}\gamma$

144) $z = x$, $z = -x$, $y^2 = 4 - 2x$ yüzeylerinin sınırladığı cismin ağırlık merkezini bulunuz. (Yoğunluk $= st$)

Cevap. $\bar{y} = \bar{z} = 0$, $\bar{x} = \dfrac{8}{7}$

145) $z = 0$, $x^2 + z = 1$, $y^2 + z = 1$ yüzeylerinin sınırladığı cismin ağırlık merkezini bulunuz. (Yoğunluk $= st$)

Cevap. $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\bar{z} = \frac{1}{3}$

146) $z^2 = x^2 + y^2$ konisi ile $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinin sınırladığı ve koninin üst tarafında kalan cismin ağırlık merkezini bulunuz. (Yoğunluk $= st$)

Cevap. $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\bar{z} = \frac{3(2 + \sqrt{2})a}{16}$

24. BÖLÜM

VEKTÖR ANALİZİ

24.1 Vektör cebri.

Bu kitabın birinci ve ikinci ciltlerinde konuların işlenişi sırasında, vektör cebrinin bilindiği kabul edilmiştir. Ancak, vektör analizine başlarken, vektör cebrine ait bilgilerin hatırlatılmasında fayda görülmüştür.

24.1 - 1. Skaler ve vektöryel büyüklükler.

Yalnız bir sayı ile ifade edilebilen büyüklüklere veya diğer bir deyimle, tanım ve ölçüleri eksen kavramını gereksinmeyen büyüklüklere *skaler büyüklükler* denir. Kütle, zaman, sıcaklık, hacım, elektrik miktarı skaler büyüklüklerdir. Skaler büyüklüklerin eşitliği, ancak aynı birimle ifade edilmeleri ile mümkün olur. Bu takdirde, bunları temsil eden reel sayılar eşitseler, skalerler de eşit olur.

Yöneltilmiş bir doğrultu kullanılmadıkça tanımlanamıyan ve ölçülemiyen büyüklüklere *vektöryel büyüklükler* denir. Hız, ivme, kuvvet gibi.

24.1 - 2. Vektör.

Vektöryel büyüklükler *vektör* adı verilen yönlü doğru parçaları ile gösterilirler. Vektör, belirli bir uzunluğa, belirli bir doğrultuya ve belirli bir yöne malik bulunan bir doğru parçasıdır. Vektörler

$$\vec{AB} \,,\ \vec{V} \,,\ \vec{F} \,,\ \vec{a}$$

işaretleri ile gösterilir. A noktası vektörün *başlangıç noktası* ve B noktası da *uç noktası* adını alır. Vektörün başlangıç ve uç noktaları arasındaki uzunluğa, *vektörün uzunluğu* veya *modülü* denir ve işaretle

$$\text{mod}\,\vec{AB} = |\vec{AB}|$$

şeklinde gösterilir.

Vektörü tanımlayan doğru parçasının doğrultusu, vektörün doğrultusunu verir. İki vektör aynı doğrultuda ise, bu vektörlerin paralel olduğu söylenir.

Vektörler üç gurupta toplanır : *1. Serbest vektörler; 2. Bağlı vektörler; 3. Kayan vektörler.*

Serbest vektörler, başlangıç noktaları herhangi olan vektörlerdir.

Bağlı vektörler, herşeyi yani, başlangıç noktası, doğrultusu, yönü ve modülü verilmiş olan vektörlerdir.

Kayan vektörler, üzerinde bulundukları doğrultu üzerinde kayan vektörlerdir.

Biz bu bölümde, daha çok, serbest vektörlerle meşgul olacağız.

24.1 - 3. Vektörlerin *oxyz* eksen takımı üzerinde tanımlanması.

Uzaydaki bir vektör, *oxyz* koordinat sisteminin eksenleri üzerindeki izdüşümleri ile tanımlanır. Eksenler üzerindeki işdüşümleri a_1 , a_2 , a_3 olan bir $\vec{a}$ vektörü

$$\vec{a} = (a_1 \,,\ a_2 \,,\ a_3)$$

şeklinde gösterilir. a_1 , a_2 , a_3 sayılarına $\vec{a}$ vektörünün *bileşenleri* denir.

Aynı koordinat sisteminde verilmiş

$$\vec{a} = (a_1 , a_2 , a_3) \qquad \vec{b} = (b_1 , b_2 , b_3)$$

vektörlerinin eşit olabilmesi

$$a_1 = b_1 \qquad a_2 = b_2 \qquad a_3 = b_3$$

olması ile mümkündür.

Bileşenlerinin hepsi sıfıra eşit olan bir vektöre, *sıfır vektör* denir.

$$\vec{0} = (0, 0, 0)$$

dır.

24.1 - 4. Yer vektörü.

A ve B, koordinatları (a_1 , a_2 , a_3) ve (b_1 , b_2 , b_3) olan iki nokta olsun. A yı B ye birleştiren doğru bir vektör olup,

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1 , b_2 - a_2 , b_3 - a_3)$$

şeklinde gösterilir ve bu vektöre B noktasının A noktasına göre *yer vektörü* denir. A noktasının, O başlangıç noktasına göre yer vektörü

$$\overrightarrow{OA} = (a_1 , a_2 , a_3)$$

dür. $\overrightarrow{OP}$ vektörü $P(x, y, z)$ noktasının, O orijinine göre yer vektörü olup

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

şeklinde gösterilir.

Bileşenleri ile verilmiş bir $\vec{a} = (a_1 , a_2 , a_3)$ vektörünün modülü

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

dir. $\overrightarrow{OA} = (a_1 , a_2 , a_3)$ ise modül, $\overline{OA}$ doğru parçasının uzunluğudur.

Modülü bire eşit olan bir vektöre *birim vektörü* denir.

$$\vec{e} = (\cos\theta \ , \ \sin\theta \ , \ 0)$$

bir birim vektörüdür.

24.1 - 5. Bir vektörün bir skalerle çarpımı.

Bir dik eksen takımında verilmiş bir $\vec{a}$ vektörünün bir λ skaleri ile çarpımı, bileşenleri, $\vec{a}$ vektörünün bileşenlerinin λ ile çarpımı olan bir vektördür.

$$\vec{a} = (a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3)$$

ise

$$\boxed{\lambda \vec{a} = \vec{a} \lambda = (\lambda a_1 , \lambda a_2 , \lambda a_3)}$$

dir.

$\lambda\vec{a}$ bir vektör olup modülü,

$$\begin{aligned} |\lambda \vec{a}| &= \sqrt{\lambda^2 a_1^2 + \lambda^2 a_2^2 + \lambda^2 a_3^2} \\ &= |\lambda| \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\ &= |\lambda| \, |\vec{a}| \end{aligned}$$

olarak, $\vec{a}$ nın modülünün λ ile çarpımına eşittir.

Bir vektör, pozitif bir skaler sayı ile çarpılırsa aynı doğrultu ve yönde bir vektör; negatif bir skaler sayı ile çarpılırsa aynı doğrultu, fakat zıt yönde bir vektör elde edilir.

$-\vec{a}$ vektörü $-\vec{a} = (-1)\,\vec{a}$ olarak tanımlanır. $-\vec{a}$ ile $\vec{a}$ vektörleri *zıt vektörler*dir.

24.1 - 6. Vektörlerin toplanması.

$$\vec{a} = (a_1\ , a_2\ , a_3) \qquad , \qquad \vec{b} = (b_1\ , b_2\ , b_3)$$

vektörlerinin toplamı

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1\ , a_2 + b_2\ , a_3 + b_3)}$$

eşitliği ile tanımlanır. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ gibi iki vektörün toplamı, gene bir vektördür.

$$a_i + b_i = b_i + a_i$$

olduğundan vektörlerin toplamında

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}}$$

komutatif özeliği mevcuttur.

$$\vec{c} = (c_1\ , c_2\ , c_3)$$

ise,

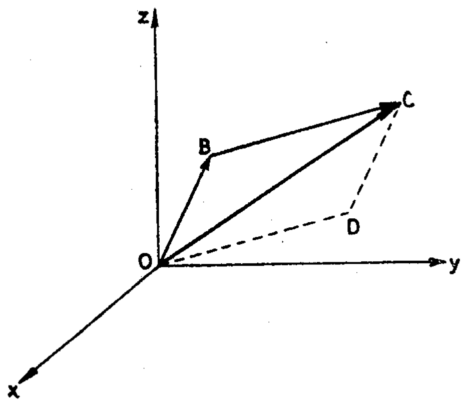
$$(a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i)$$

olduğundan

$$\boxed{(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})}$$

assosyatif özeliğinin mevcut olduğu görülür.

Vektörlerin toplamına ait üçgen veya paralelkenar kuralının bilindiğini kabul ediyoruz.



Şekil 253

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC}$$

eşitliği Şekil 253 de gösterilmiştir.

24.1 - 7. İki vektörün farkı.

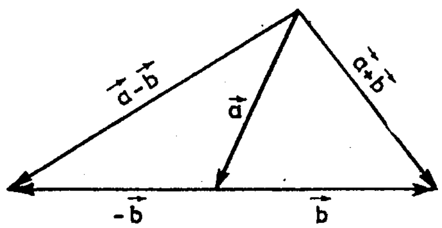
$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ gibi iki vektörün farkı

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

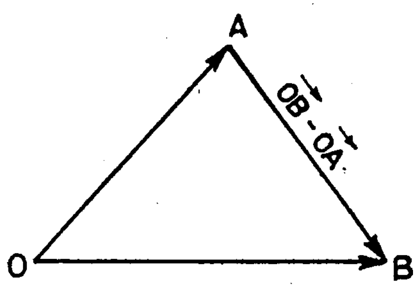
eşitliği ile tanımlanır. Şekil 254. Herhangi $\vec{a}$ vektörü için

$$\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$$

dır.



Şekil 254



Şekil 255

Diğer bir şekil olarak,

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$$

işlemi Şekil 255 de gösterilmiştir.

24.1 - 8. $\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$ birim vektörleri.

$\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$ vektörleri ox , oy , oz eksenleri doğrultusundaki birim vektörleridir. Buna göre

$$\vec{i} = (1\,,0\,,0) \quad ; \quad \vec{j} = (0\,,1\,,0) \quad ; \quad \vec{k} = (0\,,0\,,1)$$

dir.

Bir vektörün bir skalerle çarpımı ve vektörlerin toplamı kurallarından faydalanarak, bir

$$\overrightarrow{OP} = \vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

vektörünün analitik ifadesi olarak

$$\boxed{\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}}$$

yazılabilir. Şekil 256.

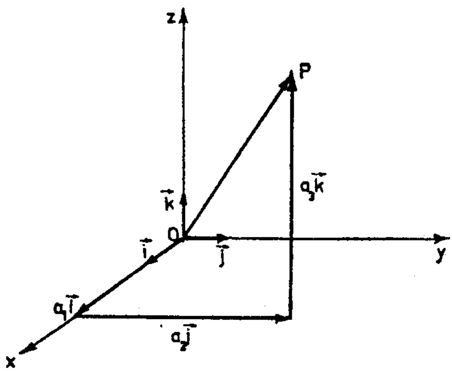
$$A(x_1, y_1, z_1) \quad , \quad B(x_2, y_2, z_2)$$

ise $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ olup

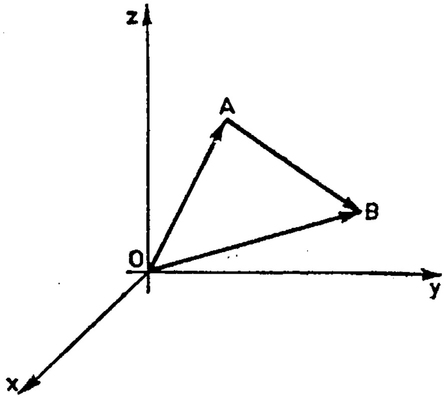
$$\overrightarrow{AB} = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}}$$

dır. Şekil 257.



Şekil 256



Şekil 257

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ vektörleri birbirine dik birim vektörleridir. Bu vektörler *oxyz* sistemini tanımlarlar.

24.1 - 9. İki vektörün skaler çarpımı.

$$\vec{a} = (a_1 , a_2 , a_3) \quad , \quad \vec{b} = (b_1 , b_2 , b_3)$$

şeklinde iki vektörün skaler çarpımı

$$\boxed{\vec{a} . \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

bağıntısı ile tanımlanır.

$$\vec{b} . \vec{a} = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = \vec{a} . \vec{b}$$

olup skaler çarpım komutatif özeliğe maliktir.

Bir $\vec{a}$ vektörünün kendisi ile skaler çarpımı

$$\boxed{\vec{a} . \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2}$$

ye, yani modülünün karesine eşittir.

$$\vec{a} = (a_1 , a_2 , a_3) \quad , \quad \vec{b} = (b_1 , b_2 , b_3) \quad , \quad \vec{c} = (c_1 , c_2 , c_3)$$

ise

$$\boxed{\vec{a} . (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} . \vec{b} + \vec{a} . \vec{c}}$$

olarak skaler çarpımın distrübütif özeliğe malik olduğu görülür.

Skaler çarpımın geometrik tanımı.

$$\vec{a} = (a_1 , a_2 , a_3) \quad , \quad \vec{b} = (b_1 , b_2 , b_3)$$

verilmiş olsunlar. a_i ve b_i ler aynı zamanda $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin doğrultu sayılarıdır. (Bak. 19.1-5). Bunlara göre bu iki vektör arasındaki açının kosinüsü (Bak. 19.1-6)

$$\cos\theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

olup

$$\boxed{\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta}$$

dır. Bu bağıntı da skaler çarpımı tanımlar.

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri birbirine dik iseler $\cos\theta = 0$ olarak

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$$

olacaktır. Buna göre, sıfır olmayan iki vektörün skaler çarpımı, ancak bu iki vektör birbirine dik iseler sıfıra eşit olabilir. Karşıt olarak $\vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$ ise bu iki vektörün birbirine dik olduğu söylenir.

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ birim vektörlerinin kendileriyle skaler çarpımları 1 e; herbirinin bir diğeri ile skaler çarpımı sıfıra eşittir. Yani

$$\boxed{\vec{i}\,.\,\vec{i} = \vec{j}\,.\,\vec{j} = \vec{k}\,.\,\vec{k} = 1}$$

$$\boxed{\vec{i}\,.\,\vec{j} = \vec{j}\,.\,\vec{k} = \vec{k}\,.\,\vec{i} = 0}$$

dır. Bu bağıntılardan ve distribütif özelikten faydalanarak

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \quad , \quad \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

vektörlerinin skaler çarpımlarının

$$\begin{aligned}
\vec{a}\,.\,\vec{b} &= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) \\
&= a_1b_1\,\vec{i}\,.\,\vec{i} + a_1b_2\,\vec{i}\,.\,\vec{j} + a_1b_3\,\vec{i}\,.\,\vec{k} \\
&\quad + a_2b_1\,\vec{j}\,.\,\vec{i} + a_2b_2\,\vec{j}\,.\,\vec{j} + a_2b_3\,\vec{j}\,.\,\vec{k} \\
&\quad + a_3b_1\,\vec{k}\,.\,\vec{i} + a_3b_2\,\vec{k}\,.\,\vec{j} + a_3b_3\,\vec{k}\,.\,\vec{k} \\
&= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3
\end{aligned}$$

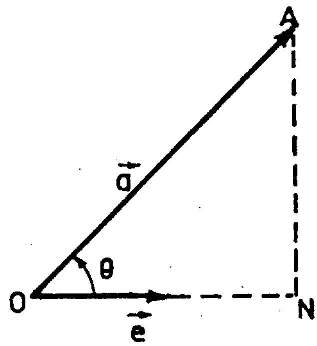
olduğu kolayca görülür.

Bir $\vec{a}$ vektörünün bir $\vec{e}$ birim vektörü doğrultusundaki bileşeni (izdüşümü)

$$a_e = \vec{a} \,.\, \vec{e}$$

dir. Şekil 258.

$\vec{a}$ ile $\vec{e}$ arasındaki açı θ ise



Şekil 258

$$a_e = \vec{a} \,.\, \vec{e} = |\vec{a}|\,|\vec{e}| \cos\theta = |\vec{a}| \cos\theta$$

dır ki bu da şekilden görüldüğü gibi

$$a_e = \overline{ON} = |\vec{a}| \cos\theta$$

dır.

Bir $\vec{a}$ vektörünün bir $\vec{b}$ vektörü doğrultusu boyunca bileşeni (izdüşümü)

$$\vec{a} \,.\, \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

dir. Buradaki

$$\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{e} = \frac{(b_1\,,\, b_2\,,\, b_3)}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

dir.

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

vektörünün $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ doğrultularındaki bileşenleri

$$\vec{a}\,.\,\vec{i} = a_1 \quad ; \quad \vec{a}\,.\,\vec{j} = a_2 \quad ; \quad \vec{a}\,.\,\vec{k} = a_3$$

dir. Bunlar da $\vec{a}$ vektörünün ox , oy , oz eksenleri üzerindeki bileşenlerine karşılık gelir.

24.1 - 10. İki vektörün vektöryel çarpımı.

$\vec{a} = (a_1 , a_2 , a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1 , b_2 , b_3)$ vektörlerinin vektöryel çarpımı

$$\boxed{\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2 \; ; \; a_3 b_1 - a_1 b_3 \; ; \; a_1 b_2 - a_2 b_1)}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Bu tanım

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Zira, ikinci taraftaki determinantın tanımladığı vektör, birinci tanımda bileşenleri ile verilmiş olan vektördür.

Tanımdan da görüldüğü gibi, iki vektörün vektöryel çarpımı gene bir vektördür.

Vektöryel çarpımda $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ nin yerlerini değiştirirsek

$$\vec{b} \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = - \vec{a} \wedge \vec{b}$$

elde edilir. Bu da bize, vektöryel çarpımın komütatif özeliğe malik olmadığını, çarpanların sırasının sonucu etkilediğini gösterir.

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ herhangi üç vektör ise

$$\boxed{\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}}$$

yazılabilir. (Distrübütif özelik)

α , β , γ lar birer skaler olarak

$$\boxed{\alpha \vec{a} \wedge \beta \vec{b} = (\alpha\beta)\, \vec{a} \wedge \vec{b}}$$

veya

$$\boxed{\vec{a} \wedge (\lambda \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \wedge \vec{b} = \lambda (\vec{a} \wedge \vec{b})}$$

olduğu da kolayca gösterilebilir.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birim vektörlerinin ikişer ikişer vektöryel çarpımları

$$\vec{i} = (1, 0, 0) \quad , \quad \vec{j} = (0, 1, 0) \quad , \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

olarak

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}$$

ve böylece devam edilirse

$$\boxed{\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0}$$

$$\boxed{\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \; ; \; \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \; ; \; \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}}$$

olduğu görülür. Son bağıntıların birinci taraflarındaki vektörlerin yerleri değiştirilirse

$$\boxed{\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \;\; ; \;\; \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \;\; ; \;\; \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}}$$

bağıntıları elde edilir.

Bu son bağıntılar ve distrübütif özelikten faydalanarak, iki vektörün vektöryel çarpımının yukarıda tanımlanan analitik ifadesi çıkarılabilir. Gerçekten

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \quad ; \quad \vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$$

iseler

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \wedge (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k})$$

$$= a_1b_1\, \vec{i} \wedge \vec{i} + a_1b_2\, \vec{i} \wedge \vec{j} + a_1b_3\, \vec{i} \wedge \vec{k}$$

$$+ a_2b_1\, \vec{j} \wedge \vec{i} + a_2b_2\, \vec{j} \wedge \vec{j} + a_2b_3\, \vec{j} \wedge \vec{k}$$

$$+ a_3b_1\, \vec{k} \wedge \vec{i} + a_3b_2\, \vec{k} \wedge \vec{j} + a_3b_3\, \vec{k} \wedge \vec{k}$$

$$= a_1b_2\, \vec{k} - a_1b_3\vec{j} - a_2b_1\, \vec{k} + a_2b_3\, \vec{i} + a_3b_1\, \vec{j} - a_3b_2\vec{i}$$

$$= (a_2b_3 - a_3\, b_2)\, \vec{i} + (a_3\, b_1 - a_1b_3)\, \vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\, \vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2 \;\; ; \;\; a_3b_1 - a_1b_3 \;\; ; \;\; a_1b_2 - a_2b_1)$$

dir.

Vektöryel çarpımın geometrik tanımı.

İzahı kolaylaştırmak için, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin xoy düzleminde olduklarını kabul edelim. Ayrıca $\vec{a}$ vektörü ox in doğrultusunda ve pozitif yönünde olsun. $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ arasındaki açı da α olsun. Şekil 259. Buna göre

$$\vec{a} = a_1\vec{i} \quad ; \quad \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$$

olarak verilmiş ise

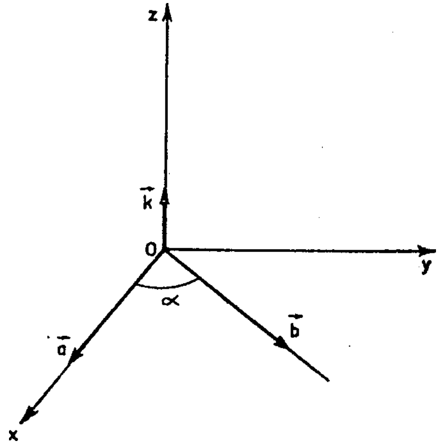
$$\vec{a} \wedge \vec{b} = a_1 b_2 \vec{k}$$

dır. Ayrıca

$$\vec{a}_1 = \left|\vec{a}\right| \quad ;$$

$$b_2 = \vec{b}\,\vec{j} = \left|\vec{b}\right| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$= \left|\vec{b}\right| \sin\alpha$$



Şekil 259

olarak

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\alpha\, \vec{k}$$

yazılabilir.

Eğer, $0 < \alpha < \pi$ ise $\sin\alpha > 0$ olarak $\vec{a} \wedge \vec{b}$ vektörü $\vec{k}$ nın yani oz in pozitif yönünde; $\pi < \alpha < 2\pi$ ise $\sin\alpha < 0$ olarak $\vec{a} \wedge \vec{b}$ vektörü oz in negatif yönünde bir vektör olacaktır.

$\vec{a} \wedge \vec{b}$ nin modülünün

$$\boxed{\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\alpha}$$

olduğu kolayca görülür.

Bunlara göre $\vec{a} \wedge \vec{b}$ *vektörü,* $\vec{a}$ *ile* $\vec{b}$ *nin teşkil ettiği düzleme dik bir vektördür.*

Sıfır vektör olmayan $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ gibi iki vektör, ancak $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$ ise aynı yönde veya zıt yönde, birbirine paralel olur. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ birbirine paralel iseler $\alpha = 0$ veya $\alpha = \pi$ olarak $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$ olur.

24.1. - 11. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörlerinin karışık çarpımı.

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$ çarpımına *karışık çarpım* denir.

$\vec{a} = (a_1 , a_2 , a_3)$, $\vec{b} = (b_1 , b_2 , b_3)$, $\vec{c} = (c_1 , c_2 , c_3)$

iseler

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{a} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

olarak buradan

$$\boxed{\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

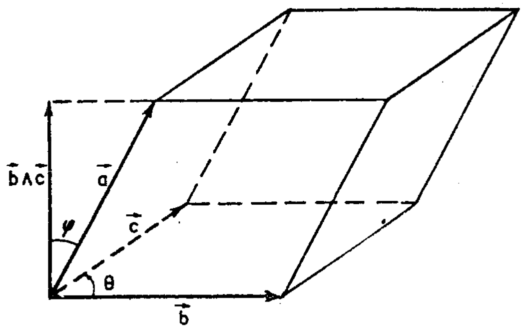
bulunur. Bu sonuçtan da görüldüğü gibi *karışık çarpım bir skalerdir.* Bu tanımdan

$$\boxed{\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Bu da bize, bir karışık çarpımdaki skaler ve vektöryel çarpım işaretlerinin yer değiştirmesi halinde, karışık çarpımın sonucunun değişmediğini gösterir.

karışık çarpımın geometrik tanımı.

Başlangıç noktaları aynı olan $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektörlerinin meydana getirdiği paralel yüzlü prizmayı gözönüne alalım. $\vec{b}$ ve $\vec{c}$ nin belirttiği düzlem yatay durumda olsun. Şekil 260.



Şekil 260

Bu paralel yüzlünün hacmı, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşit olacağından

$$V = \left| (|\vec{b}|\,|\vec{c}| \sin \theta)(|\vec{a}| \cos \varphi) \right|$$

dir. Buradaki θ , $\vec{b}$ ile $\vec{c}$ arasındaki açı; φ ise $\vec{a}$ nın düşey doğrultu ile yaptığı açıdır. Diğer taraftan

$$\vec{b} \wedge \vec{c} = |\vec{b}|\,|\vec{c}| \sin \theta\, \vec{k}$$

ve

$$\vec{a} \,.\, \vec{k} = |\vec{a}| \cos \varphi$$

olup

$$V = |\vec{a} \,.\, (\vec{b} \wedge \vec{c})|$$

dir. Buna göre, $\vec{a} \,.\, (\vec{b} \wedge \vec{c})$ karışık çarpımı, paralel yüzlünün, işaretli olarak hacmını verir.

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektörleri bir pozitif üç yüzlü oluşturacak şekilde alınmışlarsa, karışık çarpım doğrudan doğruya paralel yüzlünün hacmını verecektir.

$$\vec{a}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{c}$$

$$\vec{b}\ ,\ \vec{c}\ ,\ \vec{a}$$

$$\vec{c}\ ,\ \vec{a}\ ,\ \vec{b}$$

üç yüzlüleri aynı işaretli olduklarından

$$\boxed{\vec{a}\,.\,(\vec{b}\wedge\vec{c}) = \vec{b}\,.\,(\vec{c}\wedge\vec{a}) = \vec{c}\,.\,(\vec{a}\wedge\vec{b}) = hacim}$$

ve

$$\vec{a}\ ,\ \vec{c}\ ,\ \vec{b}$$

$$\vec{b}\ ,\ \vec{a}\ ,\ \vec{c}$$

$$\vec{c}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{a}$$

üç yüzlüleri de aynı işarette fakat $\vec{a}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{c}$ üç yüzlüsünün aksi işarette olduklarından

$$\boxed{\vec{a}\,.\,(\vec{c}\wedge\vec{b}) = \vec{b}\,.\,(\vec{a}\wedge\vec{c}) = \vec{c}\,.\,(\vec{b}\wedge\vec{a}) = -\,hacım}$$

dır. Bunlardan da, karışık çarpımdaki, skaler ve vektöryel çarpımların sırasının değiştirilebileceği kolayca görülür.

$\vec{a}\,.\,(\vec{b}\wedge\vec{c}) = 0$ ise $\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}$ *vektörleri aynı bir düzlem üzerinde olurlar.* Zira hacmın sıfıra eşit olması bunu gerektirir. $\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}$ lerin başlangıç noktaları aynı değilse, $\vec{a}\,.\,(\vec{b}\wedge\vec{c}) = 0$ bağıntısı bu üç vektörün aynı bir düzleme paralel olduğunu ifade eder.

Karşıt olarak, üç vektörün aynı bir düzlemde olabilmesi için gerek ve yeter şart, bu vektörlerin karışık çarpımının sıfıra eşit olmasıdır.

24.1 - 12. Çift (iki katlı) vektöryel çarpım:

$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ veya $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$ şeklindeki bir çarpıma *çift vektöryel çarpım* denir. Bu çarpımlar

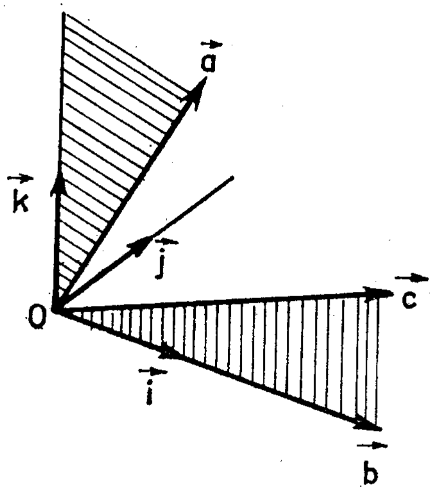
$$\boxed{\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\, \vec{c}}$$

$$\boxed{(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\, \vec{a}}$$

bağıntıları ile tanımlanır. Bu bağıntıların doğruluğunu kısa bir yoldan gösterebilmek için $oxyz$ eksen takımını, ox eksenini $\vec{b}$ doğrultusunda ve $\vec{c}$ vektörü xoy düzleminde bulunacak şekilde seçelim. Şekil 261. Bu takdirde

$$\vec{a} = (a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3)\ ,$$
$$\vec{b} = (b_1\ ,\ 0\ ,\ 0)\ ,$$
$$\vec{c} = (c_1\ ,\ c_2\ ,\ 0)$$

olacaktır. Bunlara göre



Şekil 261

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \wedge \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \wedge (b_1 c_2 \vec{k})$$

$$= -\, a_1 b_1 c_2\, \vec{j} + a_2 b_1 c_2\, \vec{i}$$

$$= a_2 b_1 c_2\, \vec{i} - a_1 b_1 c_2\, \vec{j}$$

dir. İkinci tarafa $a_1 b_1 c_1 \vec{i}$ yı ilâve edip çıkarırsak,

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = a_2 b_1 c_2 \vec{i} + a_1 b_1 c_1 \vec{i} - a_1 b_1 c_1 \vec{i} - a_1 b_1 c_2 \vec{j}$$

$$= (a_2 c_2 + a_1 c_1) b_1 \vec{i} - (a_1 b_1)(c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j})$$

$$\boxed{\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \,.\, \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{a} \,.\, \vec{b})\, \vec{c}}$$

bulunur.

İHTAR. $\vec{b} \,/\!/\, \vec{c}$ ise $\vec{b} \wedge \vec{c} = 0$ olarak çift vektöryel çarpım sıfır olur. $\vec{b}$, $\vec{c}$ ye paralel değilse, $\vec{b} \wedge \vec{c}$ vektörü, $\vec{b}$ ve $\vec{c}$ nin belirttiği düzleme diktir. Diğer taraftan, $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ vektörü $\vec{a}$ ile $\vec{b} \wedge \vec{c}$ vektörlerinin belirttiği düzleme diktir. O halde $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ vektörü $\vec{b}$ ile $\vec{c}$ nin belirttiği düzleme paralel veya bu düzlem üzerindedir.

Bazı sonuçlar :

1. $$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \neq (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$$

yani çift vektöryel çarpımda assosyatif özelik yoktur.

2. $$\boxed{\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) + \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}) + \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0}$$

dir. Çünkü

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \,.\, \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \,.\, \vec{b})\vec{c}$$

$$\vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}) = (\vec{b} \,.\, \vec{a})\vec{c} - (\vec{b} \,.\, \vec{c})\vec{a}$$

$$\vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{c} \,.\, \vec{b})\vec{a} - (\vec{c} \,.\, \vec{a})\vec{b}$$

olarak toplamları sıfıra eşittir.

ÖRNEK. $(\vec{A} \wedge \vec{B}).(\vec{C} \wedge \vec{D}) = \begin{vmatrix} \vec{A}.\vec{C} & \vec{B}.\vec{C} \\ \vec{A}.\vec{D} & \vec{B}.\vec{D} \end{vmatrix}$ olduğunu gösteriniz.

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}).(\vec{C} \wedge \vec{D}) = [(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C}]\vec{D}$$

$$= [(\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{B}.\vec{C})\vec{A}]\vec{D}$$

$$= (\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D}) - (\vec{B}.\vec{C})(\vec{A}.\vec{D})$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{A}.\vec{C} & \vec{B}.\vec{C} \\ \vec{A}.\vec{D} & \vec{B}.\vec{D} \end{vmatrix}$$

24.2 Bir değişkenli vektör fonksiyonları

24.2 - 1. Tanımlar.

Bu kısımda reel t değişkeninin $\vec{F}(t)$ şeklindeki fonksiyonları ile meşgul olacağız. Bileşenleri, t reel değişkeninin fonksiyonları olan

$$\boxed{\vec{F}(t) = [f(t)\ ,\ g(t)\ ,\ h(t)]}$$

vektörünü göz önüne alalım. Buradaki $\vec{F}(t)$ ye t nin *vektör fonksiyonu* denir.

$f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ ler t nin verilmiş bir aralığında sürekli fonksiyonlar iseler $\vec{F}(t)$ vektör fonksiyonu da bu aralıkta sürekli olur. Örneğin,

$\vec{F}(t) = (2\,,\ \sqrt{t}\,,\ \sin t)$ vektör fonksiyonu $0 \leq t < \infty$ **aralığında** süreklidir.

$\vec{F}(t) = (1\,,\ t\,,\ t^{-1})$ vektör fonksiyonu $-1 \leq t \leq 1$ aralığında sürekli değildir. Zira t^{-1} bileşeni $t = 0$ için süreksizdir.

Görülüyor ki t nin bir vektör fonksiyonu, t nin üç skaler fonksiyonu ile tanımlanmaktadır. $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ ler t nin üç skaler fonksiyonu iseler

$$\boxed{\vec{F}(t) = f(t)\,\vec{i} + g(t)\,\vec{j} + h(t)\,\vec{k}}$$

t nin bir vektör fonksiyonudur.

Sürekli bir $\vec{F}(t)$ vektör fonksiyonu, koordinatları $[f(t)\,,\ g(t)\,,\ h(t)]$ olan bir P noktasının O orijinine göre yer vektörünü yani $\overrightarrow{OP}$ vektörünü tanımlar. t değiştiği zaman P de sürekli bir eğri çizer. Şekil 262. Açık olarak görülür ki $\vec{F}(t)$ nin modülü ve doğrultusu t ile birlikte değişir. Bu takdirde

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \vec{F}(t)$$

yazılabilir.

$\vec{r} = (x\,,\ y\,,\ z) = [f(t)\,,\ g(t)\,,\ h(t)]$

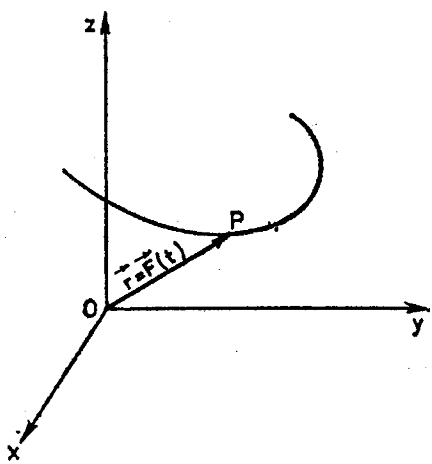
ye P nin çizdiği *eğrinin parametrik denklemleri veya vektöryel denklemi* denir.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$$

yazılırsa

$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t)$$

olduğu görülür ki, bunlar eğrinin parametrik denklemleridir. P noktasının çizdiği eğriye, $\vec{F}(t)$ vektör fonksiyonunun *hodografı* da denir.



Şekil 262

Her t değerine, yalnız bir tane $\vec{F}(t)$ vektörü karşılık geliyorsa, bu vektör fonksiyonuna *tek değerli vektör fonksiyonu* denir. Eğer bir t değerine, birden fazla vektörler karşılık geliyorsa, bu takdirde vektör fonksiyonuna *çok değerli vektör fonksiyonu* denir.

t zaman olarak düşünülürse, $\vec{r} = \vec{F}(t)$ bağıntısı, P noktasının hareketinin denklemi olur.

24.2 - 2. Vektör fonksiyonunun türevi.

$f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ fonksiyonları, t nin verilmiş bir aralığında t ye göre türeve malik fonksiyonlar olsunlar. Bu takdirde

$$\vec{F}(t) = [f(t)\ ,\ g(t)\ ,\ h(t)]$$

vektör fonksiyonunun birinci mertebeden türevi

$$\boxed{\frac{d\vec{F}}{dt} = \left(\frac{df}{dt}, \frac{dg}{dt}, \frac{dh}{dt}\right)}$$

ile tanımlıdır. Görülüyorki, bir vektör fonksiyonunun türevi de, bir vektör fonksiyonudur.

$\vec{F}(t)$ nin yüksek mertebeden türevlerini tanımlamak ta zor değildir. Gerçekten

$$\boxed{\frac{d^2\vec{F}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{F}}{dt}\right) = \left(\frac{d^2f}{dt^2}, \frac{d^2g}{dt^2}, \frac{d^2h}{dt^2}\right)}$$

dir.

Şimdi de vektör fonksiyonunun türevini geometrik olarak açıklamaya çalışalım.

$$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$$

vektör fonksiyonunu gözönüne alalım. Daha evvel açıkladığımız gibi bu bağıntı, bir uzay eğrisinin vektöryel denklemidir. Eğrinin bir P noktasına karşılık gelen bir t değeri seçelim ve bu t ye bir Δt artımı verelim. Şekil 263. Bu takdirde,

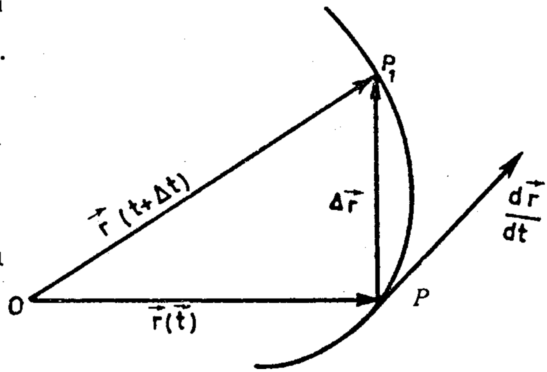
$$\vec{r}(t+\Delta t) = f(t+\Delta t)\,\vec{i} + g(t+\Delta t)\,\vec{j} + h(t+\Delta t)\,\vec{k}$$

şeklinde, eğrinin bir P_1 noktasının yer vektörünü elde ederiz. $\vec{r}(t)$ vektörünün Δt ye karşılık olan $\Delta\vec{r}$ artımı :

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)\\ &= [f(t+\Delta t)-f(t)]\,\vec{i} + [g(t+\Delta t)-g(t)]\,\vec{j} + [h(t+\Delta t)-h(t)]\,\vec{k}\end{aligned}$$

olup bu artım Şekil 263 de $\overrightarrow{PP_1} = \Delta\vec{r}$ vektörü ile gösterilmiştir.

Şimdi de $\dfrac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$ oranını gözönüne alalım. Bu vektör $\Delta\vec{r}(t)$ vektörü ile aynı doğru üzerinde olup $\Delta\vec{r}(t)$ yi $\dfrac{1}{\Delta t}$ skaleri ile çarpmak suretile elde edilmiştir. Ohalde bu vektör,



Şekil 263

$$\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\,\vec{i} + \frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}\,\vec{j} + \frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}\,\vec{k}$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer t nin gözönüne alınan değeri için $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ fonksiyonlarının türevleri mevcut iseler $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ların katsayıları, $\Delta t \to 0$ halinde $f'(t)$, $g'(t)$, $h'(t)$ türevlerine yaklaşacaktır. Buna göre, $\Delta t \to 0$ halinde $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ nin limiti mevcut olacak ve

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{df}{dt}\vec{i} + \frac{dg}{dt}\vec{j} + \frac{dh}{dt}\vec{k}$$

vektörüne eşit olacaktır.

Bu suretle elde edilen

$$\left(\frac{df}{dt}, \frac{dg}{dt}, \frac{dh}{dt}\right)$$

vektörüne $\vec{r}(t)$ vektör fonksiyonunun t skaler değişkenine göre türevi denir ve işaretle

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{veya} \quad \vec{r}'$$

şeklinde gösterilir.

Şimdi de $\frac{d\vec{r}}{dt}$ vektörünün doğrultusunu belirtelim. $\Delta t \to 0$ halinde P_1 noktası P noktasına yaklaşır. PP_1 keseni yani $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ vektörü de P noktasındaki teğetle çakışır. Buna göre $\frac{d\vec{r}}{dt}$ türev vektörü, eğrinin P noktasındaki teğetinin doğrultusundadır. Bu vektörün modülü de

$$\boxed{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dh}{dt}\right)^2}}$$

dir.

Eğer t skaler değişkeni zamanı gösteriyorsa $\frac{d\vec{r}}{dt}$ türevi, P noktasının hareketinin hız vektörünü verecektir. Bu halde hız

$$\left|\vec{v}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

$$= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

dir. Buna göre hareketli bir P noktasını belirten vektör $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ ise, $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overrightarrow{OP})$ vektörü P nin çizdiği eğriye teğettir ve her bir noktada

$$\left|\vec{v}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

dir. O halde $\vec{v}$ vektörü hareketli P noktasının hız vektörü olup P noktasında yola teğettir. Hızın değeri ise

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

dir.

24.2 - 3. Vektör fonksiyonlarının türevlerine ait kurallar.

TEOREM 1. Vektör fonksiyonlarının toplamlarının türevi, bunların türevlerinin toplamına eşittir. Yani

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}}$$

dir.

İspat.

$$\vec{a}(t) = f_1(t)\,\vec{i} + g_1(t)\cdot\vec{j} + h_1(t)\,\vec{k}$$

$$\vec{b}(t) = f_2(t)\,\vec{i} + g_2(t)\,\vec{j} + h_2(t)\,\vec{k}$$

ise

$$\vec{a}+\vec{b}=[f_1(t)+f_2(t)]\,\vec{i}+[g_1(t)+g_2(t)]\,\vec{j}+[h_1(t)+h_2(t)]\,\vec{k}$$

olarak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}+\vec{b})=[f_1'(t)+f_2'(t)]\vec{i}+[g_1'(t)+g_2'(t)]\vec{j}+[h_1'(t)+h_2'(t)]\vec{k}$$

$$=[f_1'(t)\vec{i}+g_1'(t)\vec{j}+h_1'(t)\vec{k}]+[f_2'(t)\vec{i}+g_2'(t)\vec{j}+h_2'(t)\vec{k}]$$

$$=\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}$$

dir.

TEOREM 2. İki vektör fonksiyonunun skaler çarpımının türevi,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}\,.\,\vec{b})=\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\,.\,\vec{b}+\vec{a}\,.\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}}$$

dir.

İspat.

$$\vec{a}=f_1(t)\vec{i}+g_1(t)\vec{j}+h_1(t)\vec{k}$$

$$\vec{b}=f_2(t)\vec{i}+g_2(t)\vec{j}+h_2(t)\vec{k}$$

ise

$$\vec{a}\,.\,\vec{b}=f_1f_2+g_1g_2+h_1h_2$$

olup

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}\,.\,\vec{b})=f_1'f_2+f_1f_2'+g_1'g_2+g_1g_2'+h_1'h_2+h_1h_2'$$

$$=(f_1'f_2+g_1'g_2+h_1'h_2)+(f_1f_2'+g_1g_2'+h_1h_2')$$

$$=(f_1'\vec{i}+g_1'\vec{j}+h_1'\vec{k})\,.\,(f_2\vec{i}+g_2\vec{j}+h_2\vec{k})+$$

$$(f_1\vec{i}+g_1\vec{j}+h_1\vec{k})\,.\,(f_2'\vec{i}+g_2'\vec{j}+h_2'\vec{k})$$

$$=\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\,.\,\vec{b}+\vec{a}\,.\,\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}$$

dir.

TEOREM 3. Bir $\vec{e}$ *birim vektörünün türevi, bu vektöre diktir.* $\left(|\vec{e}| = 1\right)$

İspat. $\vec{e}$, bir birim vektörü ise

$$\vec{e}\,.\,\vec{e} = 1$$

yazılabilir. Her iki tarafın türevleri eşitlenirse

$$\vec{e}\,.\,\frac{d\vec{e}}{dt} + \frac{d\vec{e}}{dt}\,.\,\vec{e} = 0$$

$$2\,\vec{e}\,.\,\frac{d\vec{e}}{dt} = 0$$

$$\vec{e}\,.\,\frac{d\vec{e}}{dt} = 0$$

elde edilerek $\vec{e}$ ve $\frac{d\vec{e}}{dt}$ vektörlerinin birbirine dik olduğu sonucuna varılmış olur.

TEOREM 4. Bir skaler fonksiyonla bir vektör fonksiyonunun çarpımının türevi,

$$\boxed{\frac{d}{dt}(f\,\vec{a}) = f\,\frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{df}{dt}\,\vec{a}}$$

dır.

İspat. $\vec{a} = a_1(t)\vec{i} + a_2(t)\vec{j} + a_3(t)\vec{k}$

ise

$$f\,\vec{a} = f\,a_1\,\vec{i} + f\,a_2\,\vec{j} + f\,a_3\,\vec{k}$$

olarak

$$\frac{d}{dt}(f\vec{a}) = \frac{d}{dt}(f a_1)\vec{i} + \frac{d}{dt}(f a_2)\vec{j} + \frac{d}{dt}(f a_3)\vec{k}$$

$$= \frac{df}{dt} a_1\vec{i} + f\frac{da_1}{dt}\vec{i} + \frac{df}{dt} a_2\vec{j} + f\frac{da_2}{dt}\vec{j} + \frac{df}{dt} a_3\vec{k} + f\frac{da_3}{dt}\vec{k}$$

$$= f\left(\frac{da_1}{dt}\vec{i} + \frac{da_2}{dt}\vec{j} + \frac{da_3}{dt}\vec{k}\right) + \frac{df}{dt}(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})$$

$$= f\,\frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{df}{dt}\,\vec{a}$$

dır.

Özel olarak, $f = \text{sabit} = \lambda$ ise $\dfrac{df}{dt} = 0$ olarak

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\lambda\vec{a}) = \lambda\,\frac{d\vec{a}}{dt}}$$

dır.

TEOREM 5. İki vektör fonksiyonunun vektöryel çarpımının türevi,

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\wedge\vec{b} + \vec{a}\wedge\frac{d\vec{b}}{dt}}$$

dir.

İspat. $\vec{c} = \vec{a}\wedge\vec{b}$ olsun.

$$\Delta\vec{c} = (\vec{a} + \Delta\vec{a})\wedge(\vec{b} + \Delta\vec{b}) - \vec{a}\wedge\vec{b}$$

$$\frac{\Delta\vec{c}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{a}\wedge\vec{b} + \vec{a}\wedge\Delta\vec{b} + \Delta\vec{a}\wedge\Delta\vec{b}}{\Delta t}$$

$$= \frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}\wedge\vec{b} + \vec{a}\wedge\frac{\Delta\vec{b}}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}\wedge\Delta\vec{b}$$

olup $\Delta t \to 0$ halinde $\Delta \vec{b} \to 0$ olarak

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \frac{d\vec{b}}{dt}$$

dir.

Bu teoremlerden faydalanarak

$$\boxed{\frac{d}{dt}[\vec{a} . (\vec{b} \wedge \vec{c})] = \frac{d\vec{a}}{dt} . (\vec{b} \wedge \vec{c}) + \vec{a} . \left(\frac{d\vec{b}}{dt} \wedge \vec{c}\right) + \vec{a} . \left(\vec{b} \wedge \frac{d\vec{c}}{dt}\right)}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}[\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})] = \frac{d\vec{a}}{dt} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) + \vec{a} \wedge \left(\frac{d\vec{b}}{dt} \wedge \vec{c}\right) + \vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \frac{d\vec{c}}{dt}\right)}$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

ÖRNEK 1.
$$\vec{a} = \sin t\, \vec{i} + \cos t\, \vec{j} + t\, \vec{k}$$
$$\vec{b} = \cos t\, \vec{i} - \sin t\, \vec{j} - 3\, \vec{k}$$
$$\vec{c} = 2\, \vec{i} + 3\, \vec{j} - \vec{k}$$

iseler

$$\frac{d}{dt}[\vec{a} . (\vec{b} \wedge \vec{c})]$$

yi hesaplayınız ve sonucu $t = 0$ için değerlendiriniz.

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \cos t\, \vec{i} - \sin t\, \vec{j} + \vec{k} \quad ; \quad \frac{d\vec{b}}{dt} = -\sin t\, \vec{i} - \cos t\, \vec{j} \quad ; \quad \frac{d\vec{c}}{dt} = 0$$

olup

$$\frac{d}{dt}[\vec{a}\,.\,(\vec{b}\wedge\vec{c})] = \begin{vmatrix} \cos t & -\sin t & 1 \\ \cos t & -\sin t & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin t & \cos t & t \\ -\sin t & -\cos t & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \sin t & \cos t & t \\ \cos t & -\sin t & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos t & -\sin t & 1 \\ 4\cos t & -4\sin t & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin t & \cos t & t \\ -\sin t & -\cos t & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2+\cos t & 3-\sin t & 0 \\ 4\cos t & -4\sin t & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & t \\ -\sin t & -\cos t & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2+\cos t & 3-\sin t \\ 4\cos t & -4\sin t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & t \\ -\sin t & -\cos t & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 8\sin t + 4\cos t\sin t + 12\cos t - 4\cos t\sin t - 3t\sin t + 2t\cos t$$

$$= (12+2t)\cos t + (8-3t)\sin t$$

dır. $t = 0$ için

$$\left\{\frac{d}{dt}[\vec{a}\,.\,(\vec{b}\wedge\vec{c})]\right\}_{t=0} = 12$$

dir.

ÖRNEK 2. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektör fonksiyonları ÖRNEK 1 de verilen fonksiyonlar olduğuna göre $t = 0$ için,

$$\frac{d}{dt}[\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})]$$

türevini hesaplayınız.

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j} + \vec{k} \quad , \quad \left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_{t=0} = \vec{i} + \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = -\sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} \qquad \left(\frac{d\vec{b}}{dt}\right)_{t=0} = -\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{c}}{dt} = \vec{0} \qquad \left(\frac{d\vec{c}}{dt}\right)_{t=0} = \vec{0}$$

ve

$$\left(\vec{a}\right)_{t=0} = \vec{j} \ , \ \left(\vec{b}\right)_{t=0} = \vec{i} - 3\vec{k} \ , \ \left(\vec{c}\right)_{t=0} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

olarak

$$\frac{d}{dt}[\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})] = (\vec{i} + \vec{k}) \wedge [(\vec{i} - 3\vec{k}) \wedge (2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k})] +$$

$$\vec{j} \wedge [-\vec{j} \wedge (2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k})] + \vec{j} \wedge [(\vec{i} - 3\vec{k}) \wedge \vec{0}]$$

olup çift vektöryel çarpıma ait kural uygulanırsa

$$= (\vec{i} - 3\vec{k}) + 2(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) - 3\vec{j} + (2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k})$$

$$= 7\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k}$$

bulunur.

24.2 - 4. Bir vektör fonksiyonunun ikinci mer tebeden türevi.

$\vec{r}(t)$ vektör fonksiyonunun türevinin, tekrar türevinden bahsedilebilir. Bu suretle, vektör fonksiyonlarının yüksek mertebeden türevleri elde edilmiş olur.

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

gibi.

$$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$$

ise

$$\boxed{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2f}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2g}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2h}{dt^2}\vec{k}}$$

yazılabilir. Eğer, $\vec{r}(t)$, P noktasının hareketinin denklemi ise, $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ bu hareketin ivme vektörünü tanımlar.

$$\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

ise

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

dir. İvmenin değeri ise

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

dir.

24.2 - 5. Diferansiel geometriye uygulama.

Yay uzunluğu :

$$\vec{r}(t) = [x(t)\ ,\ y(t)\ ,\ z(t)] \qquad (t_1 \leq t \leq t_2)$$

bir c eğrisinin vektöryel denklemi olsun. Bu eğrinin t_1 ve t_2 ye karşılık noktaları arasındaki kısmının uzunluğu

$$s(t) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(d\vec{r})^2}$$

ile belirlidir. Küçük bir yay parçası için,

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

dir. Eğrinin küçük bir parçasını gözönüne alalım. Yukarıdaki ifadeden

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$$

yazılabilir. $t = t(s)$ kabul ederek, parametre dönüştürmesi yapalım.

$$\vec{r}(s) = [x(s)\ ,\ y(s)\ ,\ z(s)]$$

olarak eğrinin küçük bir parçası için

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dfrac{d\vec{r}}{dt}}{\dfrac{ds}{dt}} = \frac{\dfrac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|}$$

yazılabilir. Halbuki $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ teğet vektör olup, $\dfrac{\dfrac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|}$ ifadesi *teğet birim vektörünü* verecektir. O halde teğet birim vektörü

$$\boxed{\vec{T} = \frac{\dfrac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)}$$

dir.

Eğrilik.

Denklemi $\vec{r} = \vec{r}(s)$ olan bir eğrinin teğet birim vektörü $\vec{T}$ olsun. α teğetin eğim açısı olarak

$$\vec{T} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$$

olup

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = (-\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j})\,\frac{d\alpha}{ds}$$

yazılabilir.

$$\frac{d\alpha}{ds} = eğrilik = K$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = K\,(-\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j})$$

olur. $\dfrac{d\vec{T}}{ds}$, $\vec{T}$ ye diktir. (Birim vektörü, türevine diktir) O halde,

$-\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}$ vektörü $\vec{T}$ ye dik olan bir birim vektörü olup *normal birim vektörüdür.* Buna göre

$$\boxed{\frac{d\vec{T}}{ds} = K\,\vec{N}}$$

dir. ($\vec{N}$ normal birim vektörüdür). Buradan

$$\boxed{Eğrilik = K = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|}$$

olduğu kolayca görülür.

$$\text{\textit{Eğrilik yarıçapı}} = R = \frac{1}{K}$$

Burulma :

Diferansiel geometride önemli olan vektörlerden biri de, *binormal birim vektörü*'dür. Bu vektör

$$\boxed{\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}}$$

bağıntısı ile tanımlanır. $\vec{N}$ ile $\vec{B}$ nin teşkil ettiği düzleme eğrinin normal düzlemi denir. Eğrinin bir noktasındaki teğet ve asal normalinin meydana getirdiği düzlem, *oskülatör düzlem* adını alır. Bir noktadaki binormal vektör, oskülatör düzleme diktir. $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ vektörleri bir sağ sistem meydana getirirler. Şekil 264.

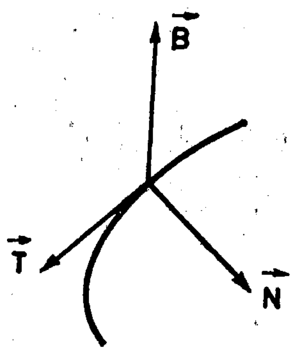
$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$$

bağıntısının her iki tarafının (s) e göre türevlerini eşitleyelim. Bu takdirde

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{ds} \wedge \vec{N} + \vec{T} \wedge \frac{d\vec{N}}{ds}$$

elde edilir.

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = K\vec{N}$$



Şekil 264

olduğu gözönüne alınır ve $\frac{d\vec{B}}{ds}$ i veren bağıntıda yerine konursa

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = K\vec{N} \wedge \vec{N} + \vec{T} \wedge \frac{d\vec{N}}{ds}$$

ve

$$K\vec{N} \wedge \vec{N} = 0$$

olarak

$$\boxed{\frac{d\vec{B}}{ds} = \vec{T} \wedge \frac{d\vec{N}}{ds}}$$

elde edilir.

$\frac{d\vec{B}}{ds}$, $\vec{B}$ ye diktir. O halde $\vec{N}$ ve $\vec{T}$ nin düzlemindedir. Diğer taraftan $\vec{T} \wedge \frac{d\vec{N}}{ds}$, $\vec{T}$ ye dik olup $\frac{d\vec{B}}{ds}$, $\vec{N}$ e paraleldir. Buna göre

$$\boxed{\frac{d\vec{B}}{ds} = \tau \vec{N}}$$

yazılabilir. Buradaki τ, *eğrinin burulması* adını alır. Burulma, oskülatör düzlemlerin arasındaki açının değişimi veya binormal vektörler arasındaki açının değişimidir. Buradan da

$$\boxed{|\tau| = \left|\frac{d\vec{B}}{ds}\right|}$$

olarak burulma elde edilir.

$$\frac{1}{\tau} = \textit{burulma yarıçapı}$$

Frenet formülleri :

$$\boxed{\frac{d\vec{T}}{ds} = K\vec{N}\ , \quad \frac{d\vec{B}}{ds} = \tau\vec{N}\ , \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = -K\vec{T} - \tau\vec{B}}$$

formülleri *Frenet formülleri* adını alır. Bunlardan ilk ikisini yukarıda çıkarmıştık. Üçüncüyü çıkarmak üzere

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} \quad , \quad \vec{T} = \vec{N} \wedge \vec{B} \quad , \quad \vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T}$$

olduğu hatırlanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{N}}{ds} &= \frac{d\vec{B}}{ds} \wedge \vec{T} + \vec{B} \wedge \frac{d\vec{T}}{ds} \\ &= \tau \vec{N} \wedge \vec{T} + \vec{B} \wedge K \vec{N} \\ &= \tau \vec{N} \wedge \vec{T} + K \vec{B} \wedge \vec{N} \\ &= -\tau \vec{B} - K \vec{T} \end{aligned}$$

bulunur.

Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} \frac{d\vec{T}}{ds} & \frac{d\vec{N}}{ds} & \frac{d\vec{B}}{ds} \\ \vec{T} & \vec{N} & \vec{B} \\ -\tau & 0 & K \end{bmatrix}$$

matrisinin birinci satırındaki elemanları kendi minörlerine eşitlemek suretile yazılabilir.

ÖRNEK. Vektöryel denklemi

$$\vec{r} = (a \cos t \ , \ a \sin t \ , \ bt)$$

olan helis eğrisini gözönüne alalım. Bu vektörün bileşenleri veya eğrinin parametrik denklemleri

$$x = a \cos t \quad , \quad y = a \sin t \quad , \quad z = bt$$

olup bunlardan her t için

$$x^2 + y^2 = a^2$$

elde edilir. Bu da bize ekseni oz ve yarıçapı a olan bir dairesel silindir verir. Bu eğri, bu silindir üzerine sarılmış bir spiraldir. Bu eğri için

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

dir. Buna göre

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-a \sin t \ , \ a \cos t \ , \ b)$$

ve

$$K\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} (\cos t \ , \ \sin t \ , \ 0) \ . \ \frac{dt}{ds} = \frac{-a}{a^2 + b^2} (\cos t \ , \sin t \ , 0)$$

dir. Bu da bize $\vec{N}$. normal birim vektörünün xoy düzlemine paralel olduğunu gösterir. Buna göre eğrilik :

$$K = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

dir.

Aynı şekilde

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \sin t \ , \ a \cos t \ , \ b)$$

$$\vec{N} = \frac{1}{K} \ \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{-a}{K(a^2 + b^2)} (\cos t \ , \ \sin t \ , \ 0)$$

ve

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} = \frac{-a}{K\,(a^2+b^2)^{3/2}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ \cos t & \sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-a}{K\,(a^2+b^2)^{3/2}} (-b\sin t\ ,\ b\cos t\ ,\ -a)$$

$$= \frac{a}{K\,(a^2+b^2)^{3/2}} (b\sin t\ ,\ -b\cos t\ ,\ a)$$

olup buradan

$$\tau\vec{N} = \frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{a}{K\,(a^2+b^2)^{3/2}} (b\cos t\ ,\ b\sin t\ ,\ 0)\frac{dt}{ds}$$

$$= \frac{a\,b}{K\,(a^2+b^2)^2} (\cos t\ ,\ \sin t\ ,\ 0)$$

ve K yerine değeri yazılırsa

$$\tau\vec{N} = \frac{b}{a^2+b^2} (\cos t\ ,\ \sin t\ ,\ 0)$$

$$\tau = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

bulunur.

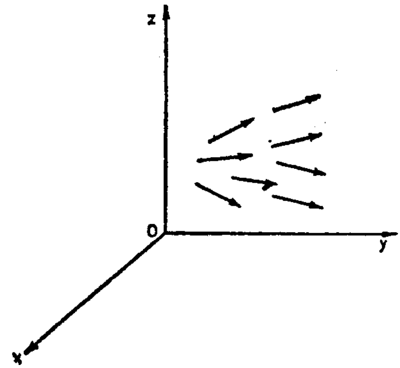
24.3 - Vektör alanları.

Daha evvel, t zamanının bir fonksiyonu olan $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ vektörü ile hareketli bir P noktasının çizdiği yolu göstermiştik. Sonra, bunun türevini alarak, hız vektörünü ve bir daha türev alarak da, ivme vektörünü bulmuştuk. Şimdi de, hareket halinde bir sıvı düşüneceğiz. Bu sıvının her noktasında bir $\vec{v}$ hız vektörü mevcut olup bu da gözönüne alınan noktadaki sıvı molekülünün hızını verecektir. Bu şekilde-

ki vektörler, sıvının her noktası için düşünülebilir. Bunların hepsi birden bir *vektör alanı* meydana getirirler. Şekil 265.

Bu şekildeki alan, ya aynı kalır veya zamanla değişir. Sabit kalıyorsa, alan *stasyoner*dir denir.

Genel olarak bir bölgenin her noktasına fiziksel bir büyüklüğün belli bir değeri karşılık gelirse bu bölgeye *alan* adı verilir. Göz önüne alınan büyüklük skalerse, alana *skaler alan,* vektörse *vektöryel alan* denir. Örneğin akan bir sıvının sıcaklığı skaler bir alan ve hızı ise vektöryel bir alan oluşturur. Bir skaler alan, her noktasına bağlanmış sayılarla dolu bir alan gibi düşünülebilir. Aynı şekilde bir vektöryel alana da, her noktasından çıkan vektörlerle dolu bir alan olarak bakabiliriz.



Şekil 265

Uzayın bir bölgesinde her $P(x, y, z)$ noktasına bir vektör tatbik edilmiş olsun. $P(x, y, z)$ noktası belli olunca, buna tatbik edilmiş olan vektör de belli olsun, yani vektörün V_x, V_y, V_z bileşenleri x, y, z nin verilen fonksiyonları olsunlar. Buna göre

$$\vec{V} = \vec{V}(P) = V_x(x, y, z)\,\vec{i} + V_y(x, y, z)\,\vec{j} + V_z(x, y, z)\,\vec{k}$$

bir vektörel alanı gösterir.

24.3 - 1. Bir eğrinin teğeti; Bir yüzeyin teğet düzlemi ve normali.

Cilt 2-20.8 de

$$x = f(t) \quad , \quad y = g(t) \quad , \quad z = h(t)$$

parametrik denklemleriyle verilmiş bir uzay eğrisinin $P(x_1, y_1, z_1)$ noktasındaki teğetinin denklemi olarak,

$$\frac{x - x_1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_1} = \frac{y - y_1}{\left(\frac{dy}{dt}\right)_1} = \frac{z - z_1}{\left(\frac{dz}{dt}\right)_1}$$

bağıntısını bulmuştuk. Eğrinin herhangibir noktasındaki yer vektörü

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = f(t)\,\vec{i} + g(t)\,\vec{j} + h(t)\,\vec{k}$$

olduğuna göre

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\,\vec{k}$$

eğrinin teğet vektörü olacaktır. Bu denklemin her iki tarafı dt ile çarpılırsa

$$d\vec{r} = f'(t)\,dt\,\vec{i} + g'(t)\,dt\,\vec{j} + h'(t)\,dt\,\vec{k}$$

denklemi elde edilir. Bu vektör *diferansiel vektör* olup

$$\boxed{d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} = (x - x_1)\,\vec{i} + (y - y_1)\,\vec{j} + (z - z_1)\,\vec{k}}$$

şeklinde de gösterilebilir. Bunun modülü

$$\left|d\vec{r}\right| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = ds$$

dir.

Aynı şekilde 20.8 de, $F(x, y, z) = 0$ yüzeyinin bir P noktasındaki teğet düzlemin denklemi olarak,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 (x - x_1) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 (y - y_1) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1 (z - z_1) = 0$$

elde etmiştik. Bu denkleme

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

ifadesinden varmıştık. Bu bağıntı,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

teğet vektörü ile

$$\vec{n} = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$$

normal vektörünün skaler çarpımlarının ifadesi, yani.

$$\vec{n}\,.\,\frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

dır. Buna göre

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_1) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_1) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_1) = 0$$

teğet düzlem denklemi bize, yüzeyin herhangibir noktasındaki normalinin

$$\frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$$

vektörü olduğunu gösterir. Bu vektör $F(x, y, z)$ skaler fonksiyonunun *gradyen vektörü* olarak tanımlanır ve

$$\boxed{\text{grad}\, F = \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}}$$

şeklinde gösterilir. ∇ sembolü *del* veya *nabla* şeklinde okunur. Gradyen vektörün belirli bir başlangıç noktası mevcut olduğundan bir bağlı vektördür.

Bu tanıma göre, teğet düzlem için verilmiş olan

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial F}{\partial z}\,\mathrm{d}z = 0$$

denklemi vektöryel olarak

$$\boxed{\operatorname{grad} F \,.\, \mathrm{d}\vec{r} = 0}$$

şeklinde yazılabilir.

Aynı şekilde $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ yüzeylerinin arakesiti olarak tanımlanmış olan eğrinin herhangibir noktasındaki teğeti, bu yüzeylerin aynı noktadaki teğet düzlemlerinin arakesiti olacağından

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial F}{\partial z}\,\mathrm{d}z = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial G}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial G}{\partial z}\,\mathrm{d}z = 0$$

denklemleriyle tanımlıdır. Bu teğetin vektöryel denklemi de

$$\boxed{\operatorname{grad} F \,.\, \mathrm{d}\vec{r} = 0 \quad , \quad \operatorname{grad} G \,.\, \mathrm{d}\vec{r} = 0}$$

şekillerine girer. Bu denklemler,

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\,\vec{i} + \mathrm{d}y\,\vec{j} + \mathrm{d}z\,\vec{k}$$

vektörünün, grad F ve grad G nin her ikisine birden dik olduğunu gösterdiğinden

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{r} \wedge (\operatorname{grad} F \wedge \operatorname{grad} G) = 0}$$

yazılabilir ki, bu da yukarıdaki denklemlerin gösterdiği teğet doğruyu verir.

Bu doğrunun simetrik şekildeki denklemini yazmak isteyelim.

$$\operatorname{grad} F \wedge \operatorname{grad} G = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}$$

olup bu vektörün bileşenleri

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial z} & \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \dfrac{\partial G}{\partial z} & \dfrac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}$$

dir. Bunlar aynı zamanda, teğetin doğrultu sayıları olduğundan, teğetin simetrik şekildeki denklemi

$$\frac{x - x_1}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{y - y_1}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial z} & \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \dfrac{\partial G}{\partial z} & \dfrac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{z - z_1}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

dir. Paydalardaki determinantlar jakobienlerle ifade edilirse

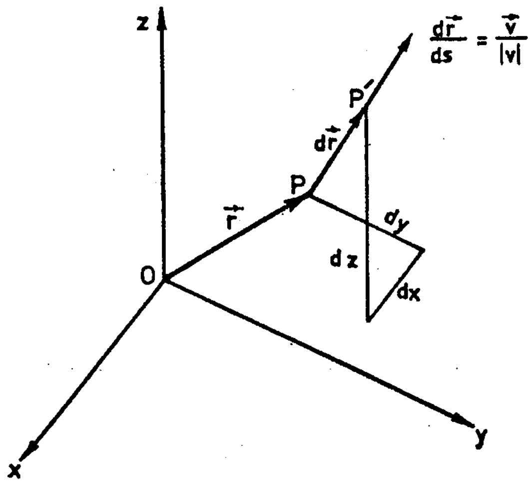
$$\frac{x - x_1}{\dfrac{D(F, G)}{D(y, z)}} = \frac{y - y_1}{\dfrac{D(F, G)}{D(z, x)}} = \frac{z - z_1}{\dfrac{D(F, G)}{D(x, y)}}$$

elde edilir.

24.3 - 2. Bir doğrultu boyunca türev.

$F(x, y, z)$ uzayın bir V bölgesinde tanımlanmış bir fonksiyon olsun. Bu bölgenin bir (x, y, z) noktasında, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ kısmi türevinin hesabında, x in Δx kadar değişiminde $F(x, y, z)$ nin (x, y, z) den

$(x + \Delta x, y, z)$ ye geçme halinde ΔF artımının Δx e oranı, yani $\dfrac{\Delta F}{\Delta x}$ oranı göz önüne alınır. Bu halde, $F(x, y, z)$ yalnız ox eksenine paralel bir doğru boyunca değişir. Aynı şekilde $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ lerin hesabında da F, oy ve oz eksenlerine paralel olarak değişir.



Şekil 266

$F(x, y, z)$ fonksiyonunun verilen bir doğrultu boyunca türevi diye, $F(x, y, z)$ nin değişiminin verilen doğrultuda alınan Δs yoluna oranı olan

$$\frac{\Delta F}{\Delta s}$$

in, $\Delta s \to 0$ halindeki limitine denir. Buna göre (Şekil 266)

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{F(P') - F(P)}{\Delta s} = \frac{dF}{ds}$$

dir.

Verilmiş doğrultu $\vec{v}$ vektörünün doğrultusu olsun. $F(x, y, z)$ fonksiyonunun, (x, y, z) noktasındaki, $\vec{v}$ doğrultusu boyunca türevi

$$\frac{dF}{ds} \quad , \quad \nabla_{\vec{v}} F$$

sembolleri ile gösterilir.

(x, y, z) noktasının $\vec{v}$ doğrultusu boyunca yer değiştirmesine karşılık olan $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ artımları $\vec{v}$ nin v_x, v_y, v_z bileşenleri ile orantılıdır. Buna göre

$$\Delta x = h\, v_x \quad , \quad \Delta y = h\, v_y \quad , \quad \Delta z = h\, v_z$$

dir. h pozitif bir sayıdır.

Böylece yer değiştirme $\Delta\vec{r} = h\,\vec{v}$ vektörüdür ki, bunun uzunluğu

$$\Delta s = |\Delta\vec{r}| = h\,|\vec{v}|$$

dir. Bunlara göre, doğrultu boyunca türev

$$\nabla_{\vec{v}} F = \lim_{h \to 0} \frac{F(x + h\,v_x\,,\, y + h\,v_y\,,\, z + h\,v_z) - F(x\,,\, y\,,\, z)}{h\,|\vec{v}|}$$

limiti ile tanımlanır.

Eğer $F(x, y, z)$, gözönüne alınan noktada bir toplam diferansiele malikse,

$$\Delta F = F(x + h\,v_x\;,\; y + h\,v_y\;,\; z + h\,v_z) - F(x,\, y,\, z)$$

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x} h\,v_x + \frac{\partial F}{\partial y} h\,v_y + \frac{\partial F}{\partial z} h\,v_z + \varepsilon_1 h\,v_x + \varepsilon_2 h\,v_y + \varepsilon_3 h\,v_z$$

olup buradan,

$$\frac{\Delta F}{\Delta s} = \frac{\Delta F}{h|\vec{v}|} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{v_x}{|\vec{v}|} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{v_y}{|\vec{v}|} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{v_z}{|\vec{v}|} + \varepsilon_1\frac{v_x}{|\vec{v}|} + \varepsilon_2\frac{v_y}{|\vec{v}|} + \varepsilon_3\frac{v_z}{|\vec{v}|}$$

yazılabilir. $\Delta s \to 0$ yani $h \to 0$ halinde son üç terim sıfıra yaklaşır.

Birinci taraf ise aranılan türeve yaklaşır. Buna göre

$$\frac{dF}{ds} = \nabla_{\vec{v}} F = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{v_x}{|\vec{v}|} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{v_y}{|\vec{v}|} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{v_z}{|\vec{v}|}$$

dir. Buradaki $\frac{v_x}{|\vec{v}|}, \frac{v_y}{|\vec{v}|}, \frac{v_z}{|\vec{v}|}$ ler $\vec{v}$ vektörü doğrultusundaki $\vec{e}$ birim vektörünün bileşenleri ve aynı zamanda $\vec{v}$ vektörünün doğrultu kosinüsleridir. O halde

$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{v}|}(v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) = \cos\alpha\, \vec{i} + \cos\beta\, \vec{j} + \cos\gamma\, \vec{k}$$

yazılabilir. Doğrultu kosinüsleri türev ifadesinde yerlerine konursa

$$\boxed{\nabla_{\vec{v}} F = \frac{\partial F}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z} \cos\gamma}$$

elde edilir. Buna göre şu teorem söylenebilir.

TEOREM. *$F(x, y, z)$ fonksiyonunun, doğrultu açıları α, β, γ olan bir doğrultu boyunca türevi*

$$\boxed{\frac{dF}{ds} = \nabla_{\vec{v}} F = \frac{\partial F}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z} \cos\gamma}$$

dır.

Bu ifadenin sağ tarafı

$$\operatorname{grad} F = \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}$$

vektörü ile $\vec{v}$ nin $\vec{e}$ birim vektörü olan

$$\vec{e} = \cos\alpha\, \vec{i} + \cos\beta\, \vec{j} + \cos\gamma\, \vec{k}$$

vektörünün skaler çarpımıdır. O halde, doğrultu boyunca türev, grad F

in $\vec{v}$ vektörü doğrultusundaki bileşenidir. Diğer bir deyimle, grad F in herhangibir doğrultudaki bileşeni, $F(x, y, z)$ nin o doğrultudaki türevine eşittir. Buna göre

$$\boxed{\nabla_{\vec{v}} F = \nabla F \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \nabla F \cdot \vec{e} = \text{izd}_{\vec{v}} \nabla F}$$

dir. $\nabla_{\vec{v}} F$, bu nedenle doğrultu boyunca türev işareti olarak kullanılır.

Özel olarak $\vec{e} = \vec{i}$ ise

$$\nabla_{\vec{v}} F = \nabla_x F = \nabla F \cdot \vec{i} = \frac{\partial F}{\partial x}$$

olur. Aynı şekilde

$$\nabla_y F = \nabla F \cdot \vec{j} = \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\nabla_z F = \nabla F \cdot \vec{k} = \frac{\partial F}{\partial z}$$

dir.

Bazı haller vardır ki, doğrultu boyunca türev, kısmi türev işareti ile gösterilir. Bunlardan en çok rastlananı, bir S yüzeyinin (x, y, z) noktasındaki normali doğrultusu boyunca hesaplanan türevidir. İstenilen doğrultudaki normal vektörü $\vec{n}$ ise, normal doğrultusu boyunca türev

$$\nabla_{\vec{n}} F = \nabla F \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\partial F}{\partial n}$$

şeklinde gösterilir.

$$\nabla_{\vec{v}} F = \nabla F \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \text{izd}_{\vec{v}} \nabla F$$

bağıntıları $\nabla F = \operatorname{grad} F$ vektörü hakkında daha fazla bilgi verir. Çünkü bu eşitlikten, verilen bir noktadaki doğrultu boyunca türevin, ∇F doğrultusunda olduğu zaman, maksimum değerde olacağı sonucu çıkarılır. Gerçekten

$$\nabla_{\vec{v}} F = \nabla F \cdot \vec{e} = |\nabla F| \, |\vec{e}| \cos\theta = |\nabla F| \cos\theta$$

olup $\vec{v}$ doğrultusu ∇F doğrultusu ile çakışırsa $\theta = 0$ ve $\cos\theta = 1$ olarak $\nabla_{\vec{v}} F$ en büyük değerini alır. Yani $\nabla_{\vec{v}} F = |\nabla F|$ olur. Bu maksimum değer

$$|\nabla F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

dir. Böylece, gradyen vektör, F in en hızlı değiştiği doğrultuyu gösterir ve gradyen vektörün modülü, o doğrultudaki değişme hızıdır.

$\vec{v}$ vektörü eğer, $F(x, y, z) = 0$ yüzeyine x, y, z de teğet ise, o takdirde

$$\nabla_{\vec{v}} F = 0$$

olur. Çünkü, bu halde ∇F yüzeyin normali olur.

Bazen, bir eğri boyunca türevden bahsedilir. Bununla, eğrinin bir teğeti boyunca türevinden bahsetmek istenir. Farzedelim ki eğri, s yay uzunluğu parametre olmak üzere,

$$x = f(s) \quad , \quad y = g(s) \quad , \quad z = h(s)$$

denklemleriyle verilmiş olsun ve seçilen doğrultuda s artsın. Daha evvel, teğet birim vektörünün

$$\vec{T} = \frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j} + \frac{dz}{ds}\vec{k}$$

olduğunu görmüştük. O halde eğri boyunca türev

$$\nabla_{\vec{T}} F = \nabla F \cdot \vec{T}$$

$$\nabla_{\vec{T}} F = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{ds} = \frac{dF}{ds}$$

dir ki bu da eğrinin yay uzunluğuna göre F in değişme hızını verir.

Üç değişkenli hali iki değişkenli $F(x, y)$ fonksiyonuna uygulayabiliriz. Verilen $\vec{v}$ doğrultusu xoy düzleminde olacaktır. Eğer $\vec{v}$,ox ekseni ile α açısını yapıyorsa

$$\nabla_{\vec{v}} F = \nabla_{\alpha} F = \frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\sin\alpha$$

yazılabilir. Buna göre doğrultu boyunca türev,

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j}$$

nin verilen doğrultudaki bileşenidir. grad F doğrultusunda alınan türev maksimum değerde olup bu değer,

$$|\nabla F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}$$

dir.

$F(x, y) = 0$ eğrisi boyunca alınacak türev de sıfıra eşittir. Zira türev, eğri boyunca olup, grad F normal doğrultusunda olduğuna göre

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \cos\theta = 0$$

ve

$$\nabla_{\vec{v}} F = |\nabla F| \cos\theta = 0$$

olur.

ÖRNEK 1. $F(x, y, z) = x^2y + xz$ fonksiyonunun $\vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ vektörü doğrultusundaki türevinin $(1, 2, -1)$ noktasındaki değerini bulunuz.

$$\vec{e} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{3}(2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$$

$$\nabla F = (2xy + z)\vec{i} + x^2\vec{j} + x\vec{k}$$

olup

$$\nabla_{\vec{v}} F = \nabla F . \vec{e} = \frac{2}{3}(2xy + z) - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$$

dir. Bu türevin $(1, 2, -1)$ deki değeri

$$\nabla_{\vec{v}} F = \frac{5}{3}$$

dir.

ÖRNEK 2. $F(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + z^2$ fonksiyonunun, $(1, 2, 3)$, $(3, 5, 0)$ noktalarını birleştiren doğru boyunca türevinin $(1, 2, 3)$ noktasındaki değerini bulunuz.

$$\nabla F = 4x\vec{i} - 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

$$\vec{e} = \frac{2\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{22}}$$

olup

$$\nabla_{\vec{v}} F = \nabla F . \vec{e} = \frac{1}{\sqrt{22}}(8x - 6y - 6z)$$

dir. Bu türevin $(1, 2, 3)$ noktasındaki değeri

$$\nabla_{\vec{v}} F = \frac{1}{\sqrt{22}}(8 - 12 - 18) = -\sqrt{22}$$

dir.

ÖRNEK 3. $\varphi = x^2 yz^3$ fonksiyonunun, hangi doğrultudaki türevi maksimum değerdedir. Bu maksimum değerin $(2, 1, -1)$ noktasındaki değerini bulunuz.

Doğrultu boyunca türevin maksimum olduğu doğrultu grad φ doğrultusudur. Bu ise

$$\nabla \varphi = 2xyz^3 \vec{i} + x^2 z^3 \vec{j} + 3x^2 yz^2 \vec{k}$$

doğrultusudur. $(2, 1, -1)$ noktasında, bu doğrultu

$$\nabla \varphi = -4\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$$

şeklinde olup türevin maksimum değeri

$$|\nabla \varphi| = \sqrt{16 + 16 + 144} = 4\sqrt{11}$$

dir.

ÖRNEK 4. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ fonksiyonunun $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25$ eğrisi boyunca türevinin $(3, 4, 5)$ deki değerini hesaplayınız.

Teğetin doğrultu sayıları

$$\text{grad}\, F \wedge \text{grad}\, G = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & -2z \\ 4x & 4y & -2z \end{vmatrix}$$

vektörünün bileşenleridir. Bunlar da

$$y \quad , \quad x \quad , \quad 0$$

olup teğet birim vektörü

$$\vec{T} = \frac{y\vec{i} - x\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ve

$$\nabla F = 2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} - 2z\,\vec{k}$$

olarak

$$\nabla F \,.\, \vec{T} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} - 2z\,\vec{k})\,(y\,\vec{i} - x\,\vec{j})$$

$$= \frac{2xy - 2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

bulunur.

ÖRNEK 5. $\vec{V} = (x^2 - y^2)\,\vec{i} + (xyz - 1)\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ vektör fonksiyonunun $(1, 2, 0)$ noktasında $(1, 2, 0)$ dan $(0, 0, 0)$ a giden doğrultuda türevini hesaplayınız.

$$\frac{d\vec{V}}{ds} = \frac{dV_x}{ds}\,\vec{i} + \frac{dV_y}{ds}\,\vec{j} + \frac{dV_z}{ds}\,\vec{k}$$

ve

$$\frac{dV_x}{ds} = \frac{1}{\sqrt{5}} [2x\,(-1) - 2y\,(-2)] = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{dV_y}{ds} = \frac{1}{\sqrt{5}} [yz\,(-1) + xz\,(-2) + xy\,.\,0] = 0$$

$$\frac{dV_z}{ds} = \frac{1}{\sqrt{5}} [0 + 0 + 1\,.\,0] = 0$$

olup

$$\frac{d\vec{V}}{ds} = \frac{6}{\sqrt{5}}\,\vec{i}$$

dir.

ÖRNEK 6. $F = x^2 - y^2$ nin $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ yüzeyinin normali boyunca türevini hesaplayınız.

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \nabla F \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$\nabla F = 2x\vec{i} - 2y\vec{j} \ ; \quad \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{|\vec{n}|} \operatorname{grad} G = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{4}$$

$$\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{2} x\vec{i} + \frac{1}{2} y\vec{j} + \frac{1}{2} z\vec{k}$$

olarak

$$\frac{\partial F}{\partial n} = (2x\vec{i} - 2y\vec{j})\left(\frac{1}{2} x\vec{i} + \frac{1}{2} y\vec{j} + \frac{1}{2} z\vec{k}\right)$$

$$= x^2 - y^2$$

bulunur.

24.3 - 3. Bir skaler alanın gradyeni.

Uzayın bir V bölgesinde tanımlı ve $u = f(x, y, z)$ ile verilmiş bir skaler alan gözönüne alalım. $f(x, y, z)$ nin kısmi türevlerini bileşen kabul eden vektöre, $f(x, y, z)$ nin *gradyen*'i denir ve işaretle

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

şeklinde gösterilir. Örneğin $f(x, y, z) = x^2y^2 - z^2$ ise

$$\operatorname{grad} f = 2xy^2\vec{i} + 2x^2y\vec{j} - 2z\vec{k}$$

dır.

grad f sembolik olarak

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) f$$

şeklinde yazılabilir. Ancak parantezle f arasındaki çarpım işareti, diferansiel işareti anlamındadır. Parantez içindeki ifade ∇ sembolü ile de gösterilir ki buna *nabla* veya *del* denir. Buna göre

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)}$$

dır. ∇, *vektör diferansiel operatörü* adını da alır. ∇, nümerik bir işaret değildir. Ancak bir fonksiyona uygulandığı zaman bir mana taşır.

$$\nabla f = \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

gibi.

24.3 - 2. de, $f(x, y, z)$ skaler fonksiyonunun

$$\vec{e} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$$

birim vektörü doğrultusu boyunca türevi olarak

$$\nabla_{\vec{e}} f = \nabla f . \vec{e} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

bağıntısı çıkarılmıştı. Buna göre $\nabla_{\vec{e}} f$ türevi, grad f in $\vec{e}$ doğrultusundaki bileşenidir. Şu halde grad f, öyle bir vektördür ki, bu vektörün herhangibir doğrultudaki bileşeni, $f(x, y, z)$ nin o doğrultudaki türevine eşittir. Özel olarak, $f(x, y, z)$ nin türevinin maksimum olduğu doğrultu grad f doğrultusudur. Bu özelikler gösteriyor ki grad f, uzayda yalnız f değerlerinin dağılma şekline yani yalnız P noktasına tabi olup koordinat eksenlerinin durum ve doğrultusuna bağlı değildir. Şu halde

$$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

gradyen ifadesinde, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lar yerine, birbirine dik herhangi üç eksenin birim vektörlerini ve $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ ler yerine de f in bu eksenler doğrultusunda alınmış türevlerini koyabiliriz.

Eğer bir $P(x, y, z)$ noktasının yer vektörü

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

ise $f(x, y, z)$ için

$$\boxed{\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z = \nabla f \,.\, \mathrm{d}\vec{r}}$$

yazılabilir.

Gradyen'in özelikleri.

1) $$\operatorname{grad}(f+g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$$

veya

$$\boxed{\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g}$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned}
\nabla(f+g) &= \frac{\partial}{\partial x}(f+g)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(f+g)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(f+g)\vec{k} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{k} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{k}\right) \\
&= \nabla f + \nabla g
\end{aligned}$$

2) $$\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$$

veya

$$\boxed{\nabla(fg) = f\,\nabla g + g\,\nabla f}$$

dir.

İspat.

$$\nabla (fg) = \frac{\partial}{\partial x}(fg)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(fg)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(fg)\vec{k}$$

$$\nabla (fg) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right) g + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{k}\right) f$$

$$\nabla (fg) = g\,\nabla f + f \nabla g$$

3) c bir sabit olarak

$$\boxed{\text{grad}\,(cg) = c\,\text{grad}\,g}$$

dir.

İHTAR. z i ortadan kaldırarak konuyu iki değişkenli $f(x, y)$ fonksiyonuna uygularsak

$$\text{grad}\,f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

elde ederiz.

24.3 - 4. Bir vektör alanının diverjansı.

Uzayın bir D bölgesinde v_x , v_y , v_z bileşenleri ile belirli bir $\vec{V}$ vektör alanı verilmiş olsun. v_x , v_y , v_z skaler fonksiyonlarının kısmi türevlerinin mevcut olduğunu farzedelim.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

ifadesine $\vec{V}$ *vektör alanının diverjansı* denir ve

$$\boxed{\text{div}\,\vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}}$$

şeklinde gösterilir. Örneğin

$$\vec{V} = x^2\,\vec{i} - xy\,\vec{j} + xyz\,\vec{k}$$

ise

$$\operatorname{div}\vec{V} = 2x - x + xy = x + xy$$

dir.

$\operatorname{div}\vec{V}$ ifadesi sembolik olarak

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{V} = \nabla\,.\,\vec{V}}$$

şeklinde de gösterilebilir. Zira

$$\nabla\,.\,\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).\,(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k})$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{V}$$

dir. Diğer bir ifade ile

$$\operatorname{div}\vec{V} = \nabla\,.\,\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).\,(v_x, v_y, v_z)$$

dir.

İHTAR. $$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial x}.\,\vec{i} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}.\,\vec{j} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}.\,\vec{k}$$

olduğu da kolayca görülebilir.

Açık olarak görülüyor ki $\operatorname{div}\vec{V}$ bir skaler alandır. Daha evvel grad f in, f skaler fonksiyonunun en hızlı değiştiği doğrultu olduğunu görmüştük. $\vec{V}$ vektörü harekette bulunan bir sıvının $P(x, y, z)$ noktasındaki hızı ise, $\operatorname{div}\vec{V}$, birim hacım değişimini verir.

Diverjans'ın özelikleri.

1) $$\operatorname{div}(\vec{u} + \vec{v}) = \operatorname{div}\vec{u} + \operatorname{div}\vec{v}$$

veya

$$\boxed{\nabla \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \nabla \cdot \vec{u} + \nabla \cdot \vec{v}}$$

dir.

İspat.

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x)\,\vec{i} + (u_y + v_y)\,\vec{j} + (u_z + v_z)\,\vec{k}$$

olarak

$$\operatorname{div}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x}(u_x + v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y + v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(u_z + v_z)$$

$$= \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

$$= \operatorname{div}\vec{u} + \operatorname{div}\vec{v}$$

dir.

İHTAR. a_1 ve a_2 birer sabit olarak

$$\boxed{\operatorname{div}(a_1\vec{u} + a_2\vec{v}) = a_1\operatorname{div}\vec{u} + a_2\operatorname{div}\vec{v}}$$

dir.

2) f skaler bir fonksiyon olarak

$$\operatorname{div}(f\,\vec{u}) = f\operatorname{div}\vec{u} + \vec{u} \cdot \operatorname{grad} f$$

veya

$$\boxed{\nabla \cdot (f\vec{u}) = f(\nabla \cdot \vec{u}) + \vec{u} \cdot \nabla f}$$

dir.

İspat.

$$\operatorname{div}(f\vec{u}) = \nabla \cdot f\vec{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot (f u_x \vec{i} + f u_y \vec{j} + f u_z \vec{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} f u_x + \frac{\partial}{\partial y} f u_y + \frac{\partial}{\partial z} f u_z$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} u_x + f \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} u_y + f \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} u_z + f \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$= f\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot (u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k})$$

$$= f \operatorname{div} \vec{u} + \vec{u} \cdot \operatorname{grad} f = f(\nabla \cdot \vec{u}) + \vec{u} \cdot \nabla f$$

24.3 - 5. Bir vektör alanının rotasyoneli.

$$\vec{V} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

gibi bir vektör alanının rotasyoneli

$$\boxed{\operatorname{Curl} \vec{V} = \operatorname{rot} \vec{V} = \vec{i} \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \vec{j} \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + \vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}}$$

ifadesi ile tanımlanır. Burada

$$\vec{i} \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = \vec{i} \wedge \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\vec{k}\right) = \frac{\partial v_y}{\partial x}\vec{k} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\vec{j}$$

$$\vec{j} \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = \vec{j} \wedge \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\vec{k}\right) = -\frac{\partial v_x}{\partial y}\vec{k} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\vec{i}$$

$$\vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = \vec{k} \wedge \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \vec{k} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial z} \vec{j} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \vec{i}$$

olarak

$$\boxed{\text{rot } \vec{V} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k}}$$

dır. Bu da

$$\text{rot } \vec{V} = \nabla \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Zira yukarıdaki rot $\vec{V}$ ifadesi, bu determinantın Laplace açılımından başka birşey değildir.

$\vec{V}$, dönen bir sıvının hızı ise rot $\vec{V}$ dönmenin açısal hız vektörünün iki katını verir.

Rotasyonelin özelikleri.

1) $\boxed{\text{rot}(\vec{u} + \vec{v}) = \text{rot } \vec{u} + \text{rot } \vec{v}}$ dir.

İspat.

$$\text{rot}(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{i} \wedge \frac{\partial}{\partial x}(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{j} \wedge \frac{\partial}{\partial y}(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{k} \wedge \frac{\partial}{\partial z}(\vec{u} + \vec{v})$$

$$= \vec{i} \wedge \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \right) + \vec{j} \wedge \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \right) + \vec{k} \wedge \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right)$$

$$= \left(\vec{i} \wedge \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \vec{j} \wedge \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right) + \left(\vec{i} \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \vec{j} \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right)$$

$$= \text{rot } \vec{u} + \text{rot } \vec{v}$$

2) $$\boxed{\operatorname{rot}(f\vec{u}) = f \operatorname{rot}\vec{u} + \operatorname{grad} f \wedge \vec{u}}$$ dir.

İspat.

$$\operatorname{rot}(f\vec{u}) = \vec{i} \wedge \frac{\partial}{\partial x} f\vec{u} + \vec{j} \wedge \frac{\partial}{\partial y} f\vec{u} + \vec{k} \wedge \frac{\partial}{\partial z} f\vec{u}$$

$$= \vec{i} \wedge \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{u} + f\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}\right) + \vec{j} \wedge \left(\frac{\partial f}{\partial y}\vec{u} + f\frac{\partial \vec{u}}{\partial y}\right) + \vec{k} \wedge \left(\frac{\partial f}{\partial z}\vec{u} + f\frac{\partial \vec{u}}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\vec{i} \wedge \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \vec{j} \wedge \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}\right) f + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} \wedge \vec{u} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} \wedge \vec{u} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \wedge \vec{u}\right)$$

$$= \left(\vec{i} \wedge \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \vec{j} \wedge \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}\right) f + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right) \wedge \vec{u}$$

$$= f \operatorname{rot}\vec{u} + \operatorname{grad} f \wedge \vec{u}$$

ÖRNEK 1. $\vec{V} = (z, x, y)$ ise

$$\operatorname{rot}\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = (1-0)\vec{i} + (1-0)\vec{j} + (1-0)\vec{k}$$

$$\operatorname{rot}\vec{V} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = (1, 1, 1)$$

dir.

ÖRNEK 2. $\vec{a}$ sabit bir vektör alanı ve $\vec{r}$ de yer vektörü ise $\operatorname{rot}(\vec{a} \wedge \vec{r}) = 2\vec{a}$ olduğunu gösteriniz.

$$\vec{a} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (za_y - ya_z)\vec{i} + (xa_z - za_x)\vec{j} + (ya_x - xa_y)\vec{k}$$

olarak

$$\operatorname{rot}(\vec{a} \wedge \vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ za_y - ya_z & xa_z - za_x & ya_x - xa_y \end{vmatrix}$$

$$= (a_x + a_x)\vec{i} + (a_y + a_y)\vec{j} + (a_z + a_z)\vec{k}$$

$$= 2(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})$$

$$= 2\vec{a}$$

dır.

24.3 - 6. Laplasien.

$$z = f(x, y) \quad \text{veya} \quad u = f(x, y, z)$$

ise

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ifadelerine z veya u fonksiyonunun *laplasien*'i denir ve işaretle

$$\boxed{\operatorname{lap} z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}} \quad ; \quad \boxed{\operatorname{lap} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$$

şeklinde gösterilir.

Vektör diferansieline ait operatör

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

ile gösterilmişti. Buna paralel olarak laplasien için de

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

yazılabilecektir. Buna göre yukarıdaki laplasienler

$$\boxed{\operatorname{lap} z = \nabla^2 z} \quad \text{veya} \quad \boxed{\operatorname{lap} u = \nabla^2 u}$$

şeklinde de gösterilebilecektir.

$z = f(x, y)$ fonksiyonu bir D bölgesinde ikinci mertebeden kısmi türevlere malik ve $\nabla^2 z = 0$ ise z fonksiyonu D bölgesinde *harmoniktir* denir (Harmonik fonksiyon). Aynı şekilde, $u = f(x, y, z)$ fonksiyonu, uzayın bir D bölgesinde sürekli ikinci mertebe türevlere malik ve laplasieni sıfıra eşitse, u fonksiyonu harmonik fonksiyondur.

Harmonik fonksiyonlar için yazılmış

$$\boxed{\nabla^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0} \; ; \; \boxed{\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0}$$

denklemlerine *Laplace denklemleri* denir.

Elastisite teorisinde çok rastlanan

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0$$

denklemini sağlıyan z fonksiyonlarına *biharmonik fonksiyonlar* denir. Bu denklem de *biharmonik denklem* adını alır.

$$\nabla^4 z = \nabla^2(\nabla^2 z)$$

ise, biharmonik denklem

$$\boxed{\nabla^4 z = 0}$$

şeklinde yazılabilir.

ÖRNEK 1. $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ ise

$$\nabla^2(uv) = u\,\nabla^2 v + v\,\nabla^2 u + 2\,\nabla u \,.\, \nabla v$$

olduğunu gösteriniz.

$$\nabla^2(uv) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(uv) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(uv)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$= u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= u\,\nabla^2 v + v\,\nabla^2 u + 2\,\nabla u \,.\, \nabla v$$

ÖRNEK 2. $z = e^x \cos y$ nin harmonik fonksiyon olduğunu gösteriniz.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cos y \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\,e^x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \cos y \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\,e^x \cos y$$

ve

$$\nabla^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^x \cos y - e^x \cos y = 0$$

olarak z harmonik fonksiyondur.

ÖRNEK 3. $z = x\,e^x \cos y$ nin biharmonik fonksiyon olduğunu gösteriniz.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x\,e^x \cos y + e^x \cos y = (x+1)\,e^x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (x+2)\,e^x \cos y \quad ; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = (x+3)\,e^x \cos y \; ;$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = (x+4)\,e^x \cos y \quad ;$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2} = -(x+2)\,e^x \cos y \quad ; \quad \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = x\,e^x \cos y$$

ve

$$\nabla^4 z = (x+4)e^x \cos y - 2(x+2)e^x \cos y + x\,e^x \cos y = 0$$

olarak z fonksiyonu biharmonik fonksiyondur.

Laplasien'in kutupsal koordinatlardaki ifadesi.

İki değişkenli

$$\nabla^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

laplasienini gözönüne alalım ve bu bağıntıyı, ρ , θ kutupsal koordinatları cinsinden ifade edelim.

Cilt 2. , 20.7 - 2 , ÖRNEK 1. de V yerine z alınırsa

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}}$$

olduğu görülür.

Laplasien'in silindirik koordinatlardaki ifadesi.

Şimdi de

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

laplasienini silindirik koordinatlar cinsinden yazalım. Dönüştürme formülleri

$$x = \rho \cos \theta \quad , \quad y = \rho \sin \theta \quad , \quad z = z$$

olup kutupsal dönüştürmedeki sonuç gözönüne alınırsa

$$\boxed{\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$$

elde edilir.

Laplasien'in küresel koordinatlardaki ifadesi.

Küresel koordinatlara dönüştürme formülleri

$$x = r \sin \varphi \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \varphi \sin \theta \quad , \quad z = r \cos \varphi$$

olup

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\text{cotg}\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

dir.

24.3 - 7. Gradyen, diverjans, rotasyonel ve laplasien'e ait çeşitli özelik ve uygulamalar.

1) *Bir gradyen'in rotasyoneli sıfıra eşittir.*

$$\boxed{\text{rot grad } f = 0} \qquad f = f(x, y, z)$$

İspat.

$$\text{rot grad } f = \nabla \wedge \nabla f = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)\vec{k}$$

$$= 0$$

dır.

Buna göre rot $\vec{V} = 0$ ise $\vec{V} = \text{grad}\, f$ eşitliğini sağlıyan bir f skaler fonksiyonu mevcuttur.

ÖRNEK. $\vec{V} = 2xyz\,\vec{i} + x^2z\,\vec{j} + x^2y\,\vec{k}$ vektör alanı için rot $\vec{V} = 0$ olduğunu gösteriniz ve grad $f = \vec{V}$ eşitliğini sağlıyan bütün fonksiyonları bulunuz.

$$\text{rot } \vec{V} = \nabla \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz & x^2 z & x^2 y \end{vmatrix}$$

$$= (x^2 - x^2)\,\vec{i} + (2xy - 2xy)\,\vec{j} + (2xz - 2xz)\,\vec{k} = 0$$

dır.

$$\text{grad } f = \vec{V}$$

ise

$$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}=2xyz\,\vec{i}+x^2z\,\vec{j}+x^2y\,\vec{k}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xyz\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2z\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=x^2y$$

olup

$$f(x,y,z)=x^2yz+\varphi(y,z)$$

dir. $\varphi(y,z)$ yi belirtmek üzere

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2z+\frac{\partial \varphi}{\partial y}=x^2z$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0\quad ;\quad \varphi(y,z)=h(z)$$

bulunur. $\varphi(y,z)$ nin bu değeri yukarıda yerine yazılırsa

$$f(x,y,z)=x^2yz+h(z)$$

elde edilir. Şimdi de $h(z)$ yi belirtmek üzere her iki tarafın z ye göre türevlerini eşitleyelim ve $\frac{\partial f}{\partial z}=x^2y$ olduğunu gözönüne alalım. Buna göre

$$\frac{\partial f}{\partial z}=x^2y+\frac{dh}{dz}=x^2y$$

$$\frac{dh}{dz}=0\quad ;\quad h(z)=st=c$$

bulunur. O halde aranan f fonksiyonları

$$f(x,y,z)=x^2yz+c$$

şeklindedir.

2) *Bir rotasyonelin diverjansı sıfıra eşittir.*

$$\boxed{\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{V} = 0}$$

İspat.

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{V} = \nabla\cdot(\nabla\wedge\vec{V}) = \nabla\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$= \nabla\cdot\left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{k}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 v_z}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z\,\partial y} = 0$$

Bu özeliğe göre de $\operatorname{div}\vec{u} = 0$ ise $\vec{u} = \operatorname{rot}\vec{V}$ eşitliğini sağlıyan bir $\vec{V}$ vektörünün mevcudiyetinden bahsedilebilir.

3) *Bir vektöryel çarpımın diverjansı.*

$$\boxed{\operatorname{div}(\vec{u}\wedge\vec{v}) = \vec{v}\,.\operatorname{rot}\vec{u} - \vec{u}\,.\operatorname{rot}\vec{v}}$$

dir.

İspat.

$$\operatorname{div}(\vec{u}\wedge\vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x}(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{k}$$

$$= \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}\wedge\vec{v} + \vec{u}\wedge\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}\right).\vec{i} + \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial y}\wedge\vec{v} + \vec{u}\wedge\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}\right).\vec{j} + \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial z}\wedge\vec{v} + \vec{u}\wedge\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}\right).\vec{k}$$

$$= \vec{i} \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \wedge \vec{v}\right) + \vec{i} \cdot \left(\vec{u} \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\right) + \vec{j} \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \wedge \vec{v}\right) + \vec{j} \cdot \left(\vec{u} \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\right)$$

$$+ \vec{k} \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \wedge \vec{v}\right) + \vec{k} \cdot \left(\vec{u} \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\right)$$

olup karışık çarpım özelliğinden faydalanarak

$$= \left(\vec{i} \wedge \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}\right) \cdot \vec{v} + \left(\vec{j} \wedge \frac{\partial \vec{u}}{\partial y}\right) \cdot \vec{v} + \left(\vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}\right) \cdot \vec{v} - \left(\vec{i} \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\right) \cdot \vec{u}$$

$$- \left(\vec{j} \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\right) \cdot \vec{u} - \left(\vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\right) \cdot \vec{u}$$

$$= \vec{v} \cdot \left[\vec{i} \wedge \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \vec{j} \wedge \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}\right] - \vec{u} \cdot \left[\vec{i} \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \vec{j} \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\right]$$

$$= \vec{v} \cdot \operatorname{rot} \vec{u} - \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}$$

bulunur.

4) *Bir gradyenin diverjansı*

$$\boxed{\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \operatorname{lap} f = \nabla^2 f}$$

dır.

İspat. $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \nabla \cdot \nabla f$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

24. BÖLÜME AİT PROBLEMLER

VEKTÖR FONKSİYONLARININ TÜREVLERİ.

1) $\vec{r} = (2t+1)\vec{i} + t^2\vec{j} + (3t-2)\vec{k}$ dan $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ve $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ türevlerini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} + 2t\vec{j} + 3\vec{k}$; $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2\vec{j}$

2) $\vec{r} = e^{2t}\vec{i} + e^{-2t}\vec{j} + 2\vec{k}$ dan $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ve $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ türevlerini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{d\vec{r}}{dt} = 2e^{2t}\vec{i} - 2e^{-2t}\vec{j}$; $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 4e^{2t}\vec{i} + 4e^{-2t}\vec{j}$

3) $\vec{r} = (\cos 2t)\vec{i} + \frac{1}{t}\vec{j} + (\sin 2t)\vec{k}$ dan $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ve $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ türevlerini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{d\vec{r}}{dt} = -2\sin 2t\,\vec{i} - \frac{1}{t^2}\vec{j} + 2\cos 2t\,\vec{k}$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -4\cos 2t\,\vec{i} + \frac{2}{t^3}\vec{j} - 4\sin 2t\,\vec{k}$$

4) $\vec{r} = \sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$ için $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ve $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ türevlerini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{d\vec{r}}{dt} = \cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j} + \vec{k}$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j}$$

5) $\vec{a} = 5t^2\vec{i} + t\vec{j} - t^3\vec{k}$, $\vec{b} = \sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j}$ olduğuna göre $\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b})$ ve $\frac{d}{dt}(\vec{a}\wedge\vec{b})$ türevlerini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{d}{dt}(\vec{a}\,.\,\vec{b}) = (5t^2 - 1)\cos t + 11t\sin t$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (t^3 \sin t - 3t^2 \cos t)\,\vec{i} - (t^3 \cos t + 3t^2 \sin t)\,\vec{j}$$

$$+ (5t^2 \sin t - \sin t - 11t \cos t)\,\vec{k}$$

6) $\frac{d}{dt}\left(\vec{a} \wedge \frac{d\vec{b}}{dt} - \frac{d\vec{a}}{dt} \wedge \vec{b}\right) = \vec{a} \wedge \frac{d^2\vec{b}}{dt^2} - \frac{d^2\vec{a}}{dt^2} \wedge \vec{b}$ olduğunu gösteriniz.

7) $\vec{u} = (2x^2 y - x^4)\,\vec{i} + (e^{xy} - y\sin x)\,\vec{j} + (x^2 \cos y)\,\vec{k}$ olduğuna göre $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}$ ve $\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x\, \partial y}$ yi hesaplayınız.

Cevap. $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = (4xy - 4x^3)\,\vec{i} + (y\,e^{xy} - y\cos x)\,\vec{j} + 2x\cos y\,\vec{k}$

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x\, \partial y} = 4x\vec{i} + (xy\,e^{xy} + e^{xy} - \cos x)\,\vec{j} - 2x\sin y\,\vec{k}$$

8) $f(x, y, z) = xy^2 z$ ve $\vec{u} = xz\,\vec{i} - xy^2\,\vec{j} + yz^2\,\vec{k}$ olduğuna göre $\frac{\partial^3}{\partial x^2\, \partial z}(f\,\vec{u})$ nun $(2, -1, 1)$ noktasındaki değerini bulunuz.

Cevap. $4\vec{i} - 2\vec{j}$

9) $\vec{r} = e^{-t}\vec{i} + \log(t^2 + 1)\,\vec{j} - tg\,t\,\vec{k}$ olduğuna göre $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ve $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ türevlerinin $t = 0$ için değerlerini bulunuz.

Cevap. $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t=0} = -\vec{i} - \vec{k}$; $\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{t=0} = \vec{i} + 2\vec{j}$

10) $x = 2\sin 3t$, $y = 2\cos 3t$, $z = 8t$ eğrisi boyunca hareket eden bir noktanın herhangibir t anındaki hız ve ivmesini bulunuz.

Cevap. $\vec{v} = 6\cos 3t\;\vec{i} - 6\sin 3t\;\vec{j} + 8\,\vec{k}$

$$\vec{a} = -18\sin 3t\;\vec{i} - 18\cos 3t\;\vec{j}$$

$$|\vec{v}| = 10 \quad ; \quad |\vec{a}| = 18$$

11) $\vec{a} = t^2 \vec{i} - t \vec{j} + (2t+1)\vec{k}$ ve $\vec{b} = (2t-3)\vec{i} + \vec{j} - t\vec{k}$ olduğuna göre $\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b})$ ve $\frac{d}{dt}\left(\vec{a} \wedge \frac{d\vec{b}}{dt}\right)$ türevlerinin $t = 1$ için değerlerini bulunuz.

Cevap. $\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = -6$; $\frac{d}{dt}\left(\vec{a} \wedge \frac{d\vec{b}}{dt}\right) = \vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$

12) $\frac{d}{ds}\left(\vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{ds} - \frac{d\vec{a}}{ds}\cdot\vec{b}\right)$ yi hesaplayınız.

Cevap. $\vec{a}\cdot\frac{d^2\vec{b}}{ds^2} - \frac{d^2\vec{a}}{ds^2}\cdot\vec{b}$

13) $\vec{A} = x^2 yz\,\vec{i} - 2xz^3\vec{j} + xz^2\vec{k}$ ve $\vec{B} = 2z\,\vec{i} + y\,\vec{j} - x^2\vec{k}$ olduğuna göre $\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\vec{A} \wedge \vec{B})$ nin $(1, 0, -2)$ noktasındaki değerini bulunuz.

Cevap. $-4\vec{i} - 8\vec{j}$

DİFERANSİEL GEOMETRİ UYGULAMALARI.

14) $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 4t$ eğrisi için

a) $\vec{T}$ teğet birim vektörünü ;

b) K eğriliğini ;

c) $\vec{N}$ normal birim vektörünü ;

d) $\vec{B}$ binormal birim vektörünü ;

e) τ burulmasını ;

bulunuz.

Cevap. *a)* $\vec{T} = -\frac{3}{5}\sin t\,\vec{i} + \frac{3}{5}\cos t\,\vec{j} + \frac{4}{5}\vec{k}$

b) $K = \frac{25}{3}$; *c)* $\vec{N} = -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}$

d) $\vec{B} = \frac{4}{5}\sin t\,\vec{i} - \frac{4}{5}\cos t\,\vec{j} + \frac{3}{5}\vec{k}$

e) $\tau = -\frac{4}{25}$

15) $\vec{r}(t) = \cos 2t\,\vec{i} + \sin 2t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$ eğrisinin $t = \frac{\pi}{6}$ ya karşılık olan noktasındaki $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, K, \tau$ değerlerini bulunuz.

Cevap. $\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$; $\vec{N} = -\frac{1}{2}(\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j})$;

$\vec{B} = \frac{1}{2\sqrt{5}}(\sqrt{3}\,\vec{i} - \vec{j} + 4\,\vec{k})$; $K = \frac{4}{5}$; $\tau = -\frac{2}{5}$

16) $\vec{r}(t) = e^{t}\,\vec{i} + e^{-t}\,\vec{j} + \sqrt{2}\,t\,\vec{k}$ eğrisinin $t = 1$ e karşılık olan noktasındaki $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, K, \tau$ değerlerini bulunuz.

Cevap. $\vec{T} = \frac{1}{e + e^{-1}}(e\,\vec{i} - e^{-1}\,\vec{j} + \sqrt{2}\,\vec{k})$;

$\vec{N} = \frac{1}{e + e^{-1}}[\sqrt{2}\,\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} - (e - e^{-1})\,\vec{k}]$;

$\vec{B} = \frac{1}{e + e^{-1}}(-e^{-1}\,\vec{i} + e\,\vec{j} + \sqrt{2}\,\vec{k})$; $K = \tau = \frac{\sqrt{2}}{(e + e^{-1})^2}$

17) $\vec{r}(t) = \operatorname{ch} t\,\vec{i} + \operatorname{sh} t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$ eğrisinin $t = 1$ e karşılık olan noktasındaki $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, K, \tau$ değerlerini hesaplayınız.

Cevap. $\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\operatorname{th} 1\,\vec{i} + \vec{j} + \operatorname{sech} 1\,\vec{k}]$;

$\vec{N} = \operatorname{sech} 1\,\vec{i} - \operatorname{th} 1\,\vec{k}$; $\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\operatorname{th} 1\,\vec{i} + \vec{j} - \operatorname{sech} 1\,\vec{k})$

$K = -\tau = \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 1}$

GRADYEN, DİVERJANS, ROTASYONEL.

18) $f(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$ olduğuna göre ∇f in $(1, -2, -1)$ noktasındaki değerini hesaplayınız.

Cevap. $-12\,\vec{i} - 9\,\vec{j} - 16\,\vec{k}$

19) $f = \log|\vec{r}|$ olduğuna göre ∇f i hesaplayınız.

Cevap. $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2}$

20) $f = \dfrac{1}{|\vec{r}|}$ olduğuna göre ∇f i hesaplayınız.

Cevap. $-\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

21) $x^2 y + 2xz = 4$ yüzeyinin $(2, -2, 3)$ noktasındaki normal birim vektörünü bulunuz.

Cevap. $-\dfrac{1}{3}\vec{i} + \dfrac{2}{3}\vec{j} + \dfrac{2}{3}\vec{k}$

22) $f = 2xz^4 - x^2 y$ olduğuna göre ∇f in $(2, -2, -1)$ noktasındaki değerini bulunuz.

Cevap. $10\vec{i} - 4\vec{j} - 16\vec{k}$

23) $\vec{A} = 2x^2\vec{i} - 3yz\vec{j} + xz^2\vec{k}$ ve $f = 2z - x^3 y$ olduğuna göre $\vec{A} \cdot \nabla f$ ve $\vec{A} \wedge \nabla f$ in $(1, -1, 1)$ noktasındaki değerlerini bulunuz.

Cevap $\vec{A} \cdot \nabla f = 5$; $\vec{A} \wedge \nabla f = 7\vec{i} - \vec{j} - 11\vec{k}$

24) $f = x^2 z + e^{y/x}$ ve $g = 2z^2 y - xy^2$ olduğuna göre $(1, 0, -2)$ noktasında $\nabla(f + g)$ ve $\nabla(fg)$ yi bulunuz.

Cevap. $-4\vec{i} + 9\vec{j} + \vec{k}$; $-8\vec{j}$

25) $\nabla |\vec{r}|^3$ ü bulunuz. ($\vec{r}$ yer vektörü)

Cevap. $3|\vec{r}|\,\vec{r}$

26) $\nabla f = 2xyz^3\vec{i} + x^2 z^3\vec{j} + 3x^2 yz^2\vec{k}$ ve $f(1, -2, 2) = 4$ olduğuna göre $f(x, y, z)$ yi bulunuz.

Cevap. $f(x, g, z) = x^2 yz^3 + 20$

27) $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g \cdot \nabla f - f \cdot \nabla g}{g^2}$ olduğunu gösteriniz. $(g \neq 0)$

28) $f(x, y\, z) = x^2 yz + 4xz^2$ fonksiyonunun $2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ doğrultusundaki türevinin $(1, -2, -1)$ noktasındaki değerini bulunuz.

Cevap. $\dfrac{37}{3}$

29) $f(x, y, z) = x^2 y z^3$ fonksiyonunun $(2, 1, -1)$ noktasında, hangi doğrultudaki türevi maksimumdur. Bu maksimum değer nedir?

Cevap. $\nabla f = -4\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$; $|\nabla f| = 4\sqrt{11}$

30) $f(x, y, z) = 4xz^3 - 3x^2 y^2 z$ fonksiyonunun $2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ doğrultusundaki türevinin $(2, -1, 2)$ noktasındaki değerini bulunuz.

Cevap. $\frac{376}{7}$

31) $f(x, y, z) = x e^y + y \cos z$ nin $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ doğrultusundaki türevinin $(1, 1, 0)$ noktasındaki değerini bulunuz.

Cevap. $\frac{2e + 1}{\sqrt{3}}$

32) $f(x, y, z) = x^2 yz - 3xyz + 2yz^2$ nin $2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ doğrultusundaki türevinin $(1, 2, 1)$ noktasındaki değerini bulunuz.

Cevap. $-\frac{8}{3}$

33) $f(x, y, z) = z \log(x^2 + y^2) - x e^y + z$ nin $P_1(3, 4, 1)$ noktasını $P_2(5, 2, 0)$ a birleştiren doğru boyunca türevinin $P_1(3, 4, 1)$ noktasındaki değerini bulunuz.

Cevap. $\frac{4}{3} e^4 - \frac{2}{3} \log 5 - \frac{29}{75}$

34) $f(x, y, z) = \log\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + xyz$ nin $3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}$ doğrultusu boyunca türevinin $(1, 3, 4)$ noktasındaki değerini bulunuz.

Cevap. $-\frac{17}{338}$

35) $\vec{A} = x^2 z \vec{i} - 2y^3 z^2 \vec{j} + xy^2 z \vec{k}$ olduğuna göre div $\vec{A}$ nın $(1, -1, 1)$ noktasındaki değerini bulunuz.

Cevap. -3

36) $f(x, y, z) = 2x^3 y^2 z^4$ olduğuna göre div grad f i hesaplayınız.

Cevap. $12xy^2 z^4 + 4x^3 z^4 + 24x^3 y^2 z^2$

37) div $(2x^2 z \vec{i} - xy^2 z \vec{j} + 3yz^2 \vec{k})$ yı hesaplayınız

Cevap. $4xz - 2xyz + 6yz$

38) $f(x, y, z) = 3x^2 z - y^2 z^3 + 4x^3 y + 2x - 3y - 5$ olduğuna göre $\nabla^2 f$ i hesaplayınız.

Cevap. $6z + 24\,xy - 2z^3 - 6y^2 z$

39) $\vec{F} = (3x^2 y - z)\vec{i} + (xz^3 + y^4)\vec{j} - 2x^3 z^2 \vec{k}$ olduğuna göre, $(2, -1, 0)$ noktasında, $\nabla(\nabla . \vec{F})$ i bulunuz.

Cevap. $-6\vec{i} + 24\vec{j} - 32\vec{k}$

40) $f = 3x^2 y$, $g = xz^2 - 2y$ olduğuna göre grad (grad f . grad g) yi hesaplayınız.

Cevap. $(6yz^2 - 12x)\vec{i} + 6xz^2\vec{j} + 12\,xyz\,\vec{k}$

41) $\vec{a} = xz^3\vec{i} - 2x^2 yz\,\vec{j} + 2yz^4\vec{k}$ olduğuna göre, $(1, -1, 1)$ noktasında rot $\vec{a}$ yı bulunuz.

Cevap. $3\vec{j} + 4\vec{k}$

42) $\vec{a} = x^2 y\,\vec{i} - 2xz\,\vec{j} + 2yz\,\vec{k}$ olduğuna göre rot rot $\vec{a}$ yı bulunuz.

Cevap. $(2x + 2)\vec{j}$

43) $\vec{r}$ yer vektörü ve rot $\vec{A} = 0$ olduğuna göre $\nabla . (\vec{A} \wedge \vec{r}) = 0$ olduğunu gösteriniz.

44) $\vec{A} = 2yz\,\vec{i} - x^2 y\,\vec{j} + xz^2\vec{k}$ ve $f = 2x^2 yz^3$ olduğuna göre $(\vec{A} . \nabla) f$ i bulunuz.

Cevap. $8xy^2 z^4 - 2x^4 yz^3 + 6x^3 yz^4$

45) $\vec{A} = 2xz^2\vec{i} - yz\,\vec{j} + 3xz^3\vec{k}$ olduğuna göre $(1, 1, 1)$ noktasında rot $\vec{A}$ yı bulunuz.

Cevap. $\vec{i} + \vec{j}$

46) $\vec{A} = 2xz^2\,\vec{i} - yz\,\vec{j} + 3xz^3\,\vec{k}$ ve $f = x^2yz$ olduğuna göre (1, 1, 1) noktasında $\text{rot}\,(f\vec{A})$ yı bulunuz.

Cevap. $5\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$

47) $\vec{A} = 2xz^2\,\vec{i} - yz\,\vec{j} + 3xz^3\,\vec{k}$ olduğuna göre (1, 1, 1) noktasında $\text{rot}\,\text{rot}\,\vec{A}$ yı bulunuz.

Cevap. $5\vec{i} + 3\vec{k}$

48) $\vec{A} = 2xz^2\,\vec{i} - yz\,\vec{j} + 3xz^3\,\vec{k}$ olduğuna göre (1, 1, 1) noktasında $\nabla(\vec{A} \,.\, \text{rot}\,\vec{A})$ yı bulunuz.

Cevap. $-2\vec{i} + \vec{j} + 8\vec{k}$

49) $\vec{A} = yz^2\,\vec{i} - 3xz^2\,\vec{j} + 2xyz\,\vec{k}$; $\vec{B} = 3x\,\vec{i} + 4z\,\vec{j} - xy\,\vec{k}$ ve $f = xyz$ olduğuna göre

a) $\vec{A} \wedge (\nabla f)$; *b*) $(\vec{A} \wedge \nabla) f$; *c*) $(\nabla \wedge \vec{A}) \wedge \vec{B}$

değerlerini hesaplayınız.

Cevap. *a*) $-5x^2yz^2\,\vec{i} + xy^2z^2\,\vec{j} + 4xyz^3\,\vec{k}$;

b) (*a*) nın aynı sonuç ;

c) $16z^3\,\vec{i} + (8x^2yz - 12xz^2)\,\vec{j} + 32xz^2\,\vec{k}$

50) $\vec{A} = e^x(\sin y \cos z\,\vec{i} + \cos y \cos z\,\vec{j} - \sin y \sin z\,\vec{k})$ ise $\text{rot}\,\vec{A} = 0$ olduğunu gösteriniz ve $\nabla f = \vec{A}$ eşitliğini sağlıyan f fonksiyonunu bulunuz.

Cevap. $f(x, y, z) = e^x \sin y \cos z$

51 $\nabla \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\vec{B} \,.\, \nabla)\vec{A} - \vec{B}(\nabla \,.\, \vec{A}) - (\vec{A} \,.\, \nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla \,.\, \vec{B})$ olduğunu gösteriniz.

52) $\nabla(\vec{A} \,.\, \vec{B}) = (\vec{B} \,.\, \nabla)\vec{A} + (\vec{A} \,.\, \nabla)\vec{B} + \vec{B} \wedge (\nabla \wedge \vec{A}) + \vec{A} \wedge (\nabla \wedge \vec{B})$ olduğunu gösteriniz.

53 $\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{A}) = \nabla(\nabla \,.\, \vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$ olduğunu gösteriniz.

25. BÖLÜM

EĞRİSEL İNTEGRALLER VE YÜZEY İNTEGRALLERİ

25.1 Eğrisel integraller.

25.1 - 1. Tanım.

Parametrik denklemleri $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ olan bir eğri yayı gözönüne alalım. $\varphi(t)$ ve $\psi(t)$ fonksiyonlarının sürekli olduklarını kabul edelim. t parametresi α dan β ya kadar değiştiği vakit (x, y) noktası c yayını çizsin. $P(x, y)$, $Q(x, y)$ fonksiyonları x ve y nin sürekli iki fonksiyonu olsun.

$[\alpha, \beta]$ aralığını $\alpha = t_0$, t_1 , t_2 , ... , $t_n = \beta$ noktalarıyla n kısma ayıralım. Bu kısımların herbirinde (x_i' , y_i') gibi birer nokta seçerek

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i' , y_i') \Delta x_i \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} Q(x_i' , y_i') \Delta y_i$$

toplamlarını gözönüne alalım.

n sonsuz olarak artar ve t nin ardışık değerleri birbirine sonsuz olarak yaklaşırlarsa, yukarıdaki toplamlar belirli limitlere yaklaşırlar. Bu limitler sırasıyla

$$\boxed{\int_c P(x, y)\, dx} \qquad \boxed{\int_c Q(x, y)\, dy}$$

ile gösterilir. Bu iki ifadeye ve bunların

$$\boxed{\int_c P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy}$$

toplamına c eğrisi boyunca *eğrisel integral* denir.

Yay parçalarının uzunlukları Δs_i olduğuna göre

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i', y_i')\, \Delta s_i$$

toplamı da oluşturulabilir ve bunun da, aynı şartlardaki limiti bizi,

$$\boxed{\int_c P(x, y)\, ds}$$

eğrisel integraline götürür.

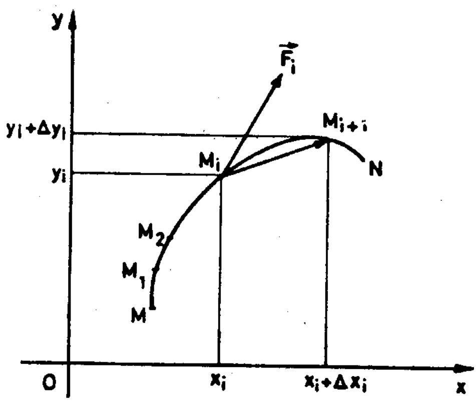
Yukarıda bir toplam limiti olarak tanımladığımız eğrisel integrali, c eğrisi üzerinde hareket eden bir noktaya tesir eden bir kuvvetin, yaptığı iş olarak ta tanımlayabiliriz.

c eğrisi üzerinde, M noktasından N noktasına doğru hareket eden bir (x, y) noktası gözönüne alalım. Bu noktaya, yer değiştirdikçe, büyüklüğü ve doğrultusu değişen bir $\vec{F}$ kuvveti tesir etsin. Bu takdirde $\vec{F}$ kuvveti, hareket eden noktanın x, y koordinatlarına bağlı olacaktır.

Şimdi, (x, y) hareketli noktasının M den N ye kadar hareketi halinde $\vec{F}$ kuvvetinin yaptığı $\mathcal{T}$ işini hesaplıyalım. Bunun için de, yukarıda yapıldığı gibi $\overset{\frown}{MN}$ eğri yayını

$$M\ , M_1\ , M_2 , \ldots , M_{n-1}\ , N$$

noktaları ile n keyfi parçaya bölelim. Şekil 267. $\overrightarrow{M_iM_{i+1}}$ vektörünü $\vec{\Delta r_i}$ ile gösterelim. $\vec{F_i}$ de $\vec{F}$ kuvvetinin M_i noktasındaki durumu olsun. Buna göre, $\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}$ yayı boyunca $\vec{F}$ kuvvetinin yaptığı iş, yaklaşık olarak, $\vec{F_i} . \vec{\Delta r_i}$ skaler çarpımına eşit düşünülebilir. Buna göre,



Şekil 267

$$\mathcal{T}_i \approx \vec{F_i} . \vec{\Delta r_i}$$

dir.

$$\vec{F} = P(x, y)\, \vec{i} + Q(x, y)\, \vec{j}$$

olsun. $P(x, y)$ ve $Q(x, y)$; $\vec{F}$ kuvvetinin bileşenleri, yani $\vec{F}$ in ox ve oy eksenleri üzerinde izdüşümleridir. M_i den M_{i+1} e geçilmesi halinde, x_i ve y_i nin aldığı artımlar, Δx_i , Δy_i olsunlar. Bu takdirde,

$$\vec{\Delta r_i} = \Delta x_i\, \vec{i} + \Delta y_i\, \vec{j}$$

ve

$$\vec{F_i} . \vec{\Delta r_i} = P(x_i , y_i)\, \Delta x_i + Q(x_i , y_i)\, \Delta y_i$$

olacaktır. $\overset{\frown}{MN}$ eğrisi boyunca $\vec{F}$ kuvvetinin yaptığı $\mathcal{T}$ işinin yaklaşık değeri de

$$\mathcal{T} \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} . \vec{\Delta r_i} = \sum_{i=1}^{n} [P(x_i , y_i)\, \Delta x_i + Q(x_i , y_i)\, \Delta y_i]$$

dir. $\vec{\Delta r_i}$ ler sıfıra yaklaşacak şekilde n i sınırsız olarak artırırsak, ikinci tarafın limiti, $\vec{F}$ in, $\overset{\frown}{MN}$ yayı boyunca yaptığı işi verecektir. Buna göre

$$\mathcal{T} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [P(x_i, y_i)\,\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\,\Delta y_i]$$

dir. İkinci tarafın bu şekilde tanımlanan limitine, $P(x, y)$ ve $Q(x, y)$ fonksiyonlarının c eğrisi boyunca *eğrisel integrali* denir ve yukarıda gösterildiği gibi

$$\mathcal{T} = \int_c P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

veya

$$\mathcal{T} = \int_{(M)}^{(N)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

şeklinde gösterilir. İkinci integral üzerindeki (M) ve (N) ler birer sayı olmayıp, eğrinin uç noktalarını gösterirler ve integralin hangi yönde hesaplanacağını belirtirler.

Eğer c eğrisi, bir uzay eğrisi ise, benzer şekilde $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ fonksiyonlarının eğrisel integralleri tanımlanabilir. Buna göre

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [P(x_k, y_k, z_k)\,\Delta x_k + Q(x_k, y_k, z_k)\,\Delta y_k + R(x_k, y_k, z_k)\,\Delta z_k]$$

$$= \int_c P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

dir.

25.1 - 2. Eğrisel integralin özelikleri.

Tanımlara göre, eğrisel integral için aşağıdaki iki özelik söylenebilir :

1) Bir eğrisel integral, integrasyon yönüne bağlıdır. İntegrasyon yönü değişirse, integral işaret değiştirir. Buna göre

$$\int_{(M)}^{(N)} P\,dx + Q\,dy = -\int_{(N)}^{(M)} P\,dx + Q\,dy$$

dir.

2) c eğrisi $\widehat{MN} = \widehat{MK} + \widehat{KN}$ olacak şekilde iki parçaya ayrılırsa

$$\int_{(M)}^{(N)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(M)}^{(K)} P\,dx + Q\,dy + \int_{(K)}^{(N)} P\,dx + Q\,dy$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Bu bağıntı, herhangi sonlu sayıda parçaya ayrılmış eğri için de yazılabilir. Bu takdirde c ye ait eğrisel integral, bu parçaların herbirine ait eğrisel integrallerin toplamına eşittir.

M ve N noktaları üst üste çakışıyorsa, c eğrisi kapalı bir eğri olur. Bu takdirde eğrisel integral

$$\int_{(M)}^{(N)} P\,dx + Q\,dy$$

sembolü ile gösterilemez. Böyle bir integrali

$$\int_c P\,dx + Q\,dy$$

işareti ile göstermek gerekir. Ancak, bu gösterilişte integrasyon yönü belli değildir. Bu nedenle, hareket yönünü de belirtecek bir işaret kullanmak gerekir ki, o da

$$\oint_c P\,dx + Q\,dy$$

şeklindedir.

İHTAR. Eğrisel integrali, bir $\vec{F}$ kuvvetinin bir c eğrisi üzerinde yaptığı iş olarak tanımladık. Halbuki $\vec{F}$ kuvveti, tatbik noktasının x, y koordinatlarına bağlı herhangi bir $\vec{F}$ vektör fonksiyonu

olarak ta düşünülebilir. Vektör fonksiyonunun bileşenleri, $P(x, y)$ ve $Q(x, y)$ iseler, $\vec{F}$ vektör fonksiyonunun c eğrisi boyunca eğrisel integrali

$$\boxed{\int_c \vec{F} . d\vec{r} = \int_c P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy}$$

şeklinde tanımlanır.

s yay uzunluğu gözönüne alınırsa

$$\int_c \vec{F} . d\vec{r} = \int_c \left(\vec{F} . \frac{d\vec{r}}{ds}\right) ds$$

ve $\dfrac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T}$ (teğet birim vektörü) olup

$$\boxed{\int_c \vec{F} . d\vec{r} = \int_c \vec{F} . \vec{T}\,ds = \int_c F_{\vec{T}}\,ds}$$

yazılabilir.

$\vec{F}$ vektör fonksiyonu, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ bileşenleri ile verilmişse integral

$$\int_c \vec{F} . d\vec{r} = \int_c P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

şeklini alır.

İHTAR. Bir $\vec{F}$ vektör fonksiyonunun eğrisel integrali, bir c kapalı eğrisi boyunca hesaplanıyorsa, bu takdirde eğrisel integrale, $\vec{F}$ vektörünün c kapalı eğrisi boyunca sirkülâsyonu denir.

$$\boxed{\oint_c \vec{F} . d\vec{r} = \vec{F} \textit{ in } c \textit{ eğrisi boyunca sirkülasyonu}}$$

25.1 - 3. Eğrisel integralin hesabı.

Bu kısımda daha evvel bir toplam limiti olarak tanımladığımız eğrisel integralin, hesabı için, bir kural vermeğe çalışacağız.

c eğrisinin, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ parametrik denklemleriyle verilmiş olduğunu farzedelim. Bu eğrinin bir $\overset{\frown}{MN}$ yayını gözönüne alalım. M ve N noktalarına karşılık gelen t parametresi değerleri α ve β olsun. $\overset{\frown}{MN}$ yayını,

$$M(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots\ldots, M_n(x_n, y_n)$$

noktaları ile Δs_i parçalarına ayıralım.

$$x_i = \varphi(t_i) \qquad , \qquad y_i = \psi(t_i)$$

olsun. Şimdi daha evvel tanımlamış olduğumuz

$$\int_c P(x, y)\, dx \quad , \quad \int_c Q(x, y)\, dy$$

eğrisel integrallerinin mevcudiyet teoremini verelim.

TEOREM. $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ *parametrik denklemleriyle verilmiş bir* c *eğrisi gözönüne alalım.* t *parametresi* α *dan* β *ya kadar değiştiği zaman* (x, y) *noktası* $\overset{\frown}{MN}$ *yayını çizsin.* $P(x, y)$ ve $Q(x, y)$ *fonksiyonları* $\overset{\frown}{MN}$ *yayı üzerinde sürekli iki fonksiyon olsun.* $[\alpha, \beta]$ *aralığını* $\alpha = t_0$, t_1 , t_2 , ... , $t_n = \beta$ *noktalarıyla* n *kısma ayıralım. Bunlara karşılık* $\overset{\frown}{MN}$ *yayı da* Δs_i *parçalarına ayrılmış olur. Bu takdirde,* (x_i', y_i') ler Δs_i *yayına ait bir noktanın koordinatları olmak şartiyle,*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} P(x_i', y_i')\, \Delta x_i = \int_{\overset{\frown}{MN}} P(x, y)\, dx$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} Q(x_i', y_i')\, \Delta y_i = \int_{\overset{\frown}{MN}} Q(x, y)\, dy$$

limitleri mevcuttur.

Bu limitler. c eğrisinin Δs_i kısmi yaylarına bölünüş şekline ve Δs_i yayı üzerinde alınmış $M_i'(x_i', y_i')$ noktalarının seçiliş şekline bağlı değildir.

Bu teorem bize, eğrisel integralin hesaplanmasına ait bir kural da verir.

$$\int_{(M)}^{(N)} P(x, y)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} P(x_i', y_i')\, \Delta x_i$$

ifadesini hesaplamak isteyelim.

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$$

olup $x = \varphi(t)$ ye sonlu artımlar formülü uygulanırsa

$$\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(t_i')(t_i - t_{i-1})$$

$$\Delta x_i = \varphi'(t_i')\, \Delta t_i$$

elde edilir. t_i', t nin t_{i-1} ile t_i arasındaki bir değeridir. (x_i', y_i') noktası Δs_i yayı üzerinde keyfi olarak seçilmiş olduğuna göre, x_i', y_i' koordinatlarını t parametresinin t_i' değerine karşılık olarak düşünebiliriz. Bu takdirde

$$x_i' = \varphi(t_i') \quad , \quad y_i' = \psi(t_i')$$

olur. x_i', y_i' ve Δx_i için bulunan bu değerler, yukarıdaki limit ifadesinde yerlerine konursa

$$\int_{(M)}^{(N)} P(x, y)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} P[\varphi(t_i'), \psi(t_i')]\, \varphi'(t_i')\, \Delta t_i$$

elde edilir. Bu eşitliğin ikinci tarafı, tek değişkenli ve sürekli olan

$$P[\varphi(t), \psi(t)]\, \varphi'(t)$$

fonksiyonunun $[\alpha, \beta]$ aralığındaki integral toplamının limitini göstermektedir. Bu ise açıklanan fonksiyonun belirli integraline eşit olup

$$\int_{(M)}^{(N)} P(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t), \psi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

dir.

Benzer şekilde hareket edilerek

$$\int_{(M)}^{(N)} Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_{\alpha}^{\beta} Q[\varphi(t), \psi(t)]\,\psi'(t)\,\mathrm{d}t$$

olduğu da gösterilebilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa

$$\int_{(M)}^{(N)} P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y =$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Big\{P[\varphi(t), \psi(t)]\,\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\,\psi'(t)\Big\}\,\mathrm{d}t$$

elde edilir ki, bu formül bir eğrisel integralin hesaplanmasına imkân veren bir formüldür.

İHTAR. Aynı kural,

$$\int_{c} P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

eğrisel integralinin, parametrik denklemleri

$$x = \varphi(t) \qquad y = \psi(t) \quad , \quad z = \gamma(t)$$

olan bir c eğrisi boyunca hesaplanmasına da uygulanabilir.

ÖRNEK 1. $\overset{\frown}{AB}$ yayı, parametrik denklemleri

$$x = R\cos t \quad , \quad y = R\sin t$$

olan ve ox ekseninin üst tarafında kalan bir yarım çember olduğuna göre

$$\int_{\widehat{AB}} x\,dy - y\,dx$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

$$dx = -R\sin t\,dt \quad , \quad dy = R\cos t\,dt$$

olup

$$\int_{\widehat{AB}} x\,dy - y\,dx = \int_0^{\pi} (R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t)\,dt$$

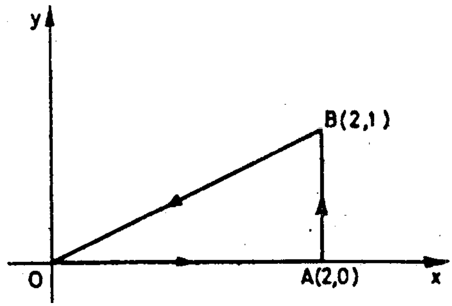
$$= R^2\int_0^{\pi} dt = \pi R^2$$

dir.

ÖRNEK 2. c eğrisi Şekil 268 deki OAB üçgen çevresi olduğuna göre

$$\int_c y^2\,dx + x^2\,dy$$

eğrisel integralini hesaplayınız.



Şekil 268

c eğrisi OA , AB , BO doğru parçalarından meydana gelmiş olup

$$\int_c y^2\,dx + x^2\,dy$$

$$= \int_{\overline{OA}} y^2\,dx + x^2\,dy + \int_{\overline{AB}} y^2\,dx + x^2\,dy + \int_{\overline{BO}} y^2\,dx + x^2\,dy$$

dir. Şimdi teker teker, ikinci taraftaki integralleri hesaplıyalım.

1) OA doğru parçası üzerinde $x = x$, $y = 0$, $dx = dx$, $dy = 0$

olup

$$\int_{\overline{QA}} y^2\,dx + x^2\,dy = \int_0^2 0\,.\,dx = 0$$

dır.

2) AB doğru parçası üzerinde ise $x = 2$, $y = y$, $dx = 0$, $dy = dy$ olup

$$\int_{\overline{AB}} y^2\,dx + x^2\,dy = \int_0^1 4\,.\,dy = 4$$

dir.

3) BO doğru parçası üzerinde de

$$x = x \quad , \quad y = \frac{1}{2}x \quad , \quad dx = dx \quad , \quad dy = \frac{1}{2}\,dx$$

olup

$$\int_{\overline{BO}} y^2\,dx + x^2\,dy = \int_2^0 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2}\right) dx = \int_2^0 \frac{3x^2}{4}\,dx = -2$$

dir. Bunlara göre

$$\int_c y^2\,dx + x^2\,dy = 0 + 4 - 2 = 2$$

dir.

ÖRNEK 3. $\int_{(1,\,0,\,1)}^{(2,\,3,\,2)} x^2\,dx - xz\,dy + y^2\,dz$ eğrisel integralini, sınırlardaki iki noktayı birleştiren doğru boyunca hesaplayınız.

(1,0,1) , (2,3,2) noktalarını birleştiren doğrunun parametrik denklemleri

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1} = t$$

den

$$x = t + 1 \quad , \quad y = 3t \quad , \quad z = t + 1$$

olarak

$$dx = dt \quad , \quad dy = 3\,dt \quad , \quad dz = dt$$

dir. (1,0,1) noktası $t = 0$ ve (2,3,2) noktası $t = 1$ e karşılık noktalar olup

$$\int_{(1,0,1)}^{(2,3,2)} x^2\,dx - xz\,dy + y^2\,dz =$$

$$= \int_0^1 [(t+1)^2 - 3(t+1)^2 + 9t^2]\,dt$$

$$= \int_0^1 [9t^2 - 2(t+1)^2]\,dt$$

$$= \left| 3t^3 - \frac{2}{3}(t+1)^3 \right|_0^1 = -\frac{5}{3}$$

dir.

ÖRNEK 4. $\vec{F} = x^3\vec{i} + 3zy^2\vec{j} - x^2y\vec{k}$ vektör fonksiyonunun, $M(3,2,1)$ noktasından $N(0,0,0)$ noktasına kadar uzanan bir doğru parçası boyunca eğrisel integralini hesaplayınız.

$M(3,2,1)$, $N(0,0,0)$ noktalarından geçen doğrunun parametrik denklemleri

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} = t$$

$$x = 3t \quad , \quad y = 2t \quad , \quad z = t$$

olup

$$dx = 3\,dt \quad , \quad dy = 2\,dt \quad , \quad dz = dt$$

dir. $M(3,2,1)$ noktası $t = 1$ ve $N(0,0,0)$ noktası $t = 0$ a karşılık noktalar olup :

$$\int_{(M)}^{(N)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{(M)}^{(N)} x^3\,\mathrm{d}x + 3zy^2\,\mathrm{d}y - x^2 y\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_1^0 [(3t)^3 \cdot 3 + 3t\,(2t)^2 \cdot 2 - (3t)^2 \cdot 2t]\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_1^0 87\,t^3\,\mathrm{d}t = -\frac{87}{4}$$

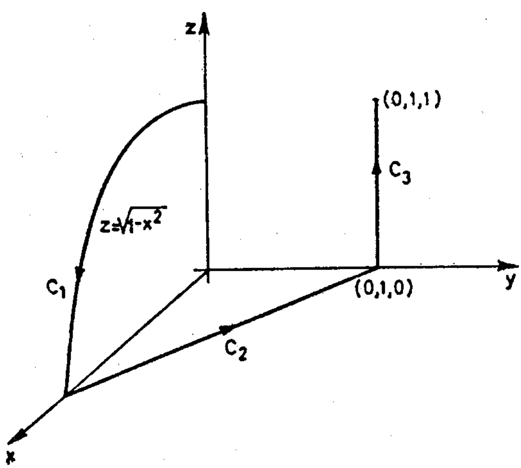
dir.

ÖRNEK 5. c eğrisi zox düzleminin, pozitif x ler kısmındaki $z = \sqrt{1 - x^2}$ dörtte bir çemberi; xoy düzlemindeki $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ noktalarını birleştiren doğru parçası ve yoz düzlemindeki $(0,1,0)$, $(0,1,1)$ noktalarını birleştiren doğru parçasından meydana gelmiş olduğuna göre (Şekil 269),

$$\int_c xz\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y - yz\,\mathrm{d}z$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

c eğrisi c_1 , c_2 , c_3 gibi üç kısımdan meydana gelmiş olduğuna göre



Şekil 269

$$\int_c = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3}$$

dir. Şimdi, ikinci taraftaki herbir integrali hesaplıyalım.

1) $z = \sqrt{1 - x^2}$ çemberi üzerinde $y = 0$, $\mathrm{d}y = 0$ olup

$$\int_{c_1} xz\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y - yz\,\mathrm{d}z = \int_{c_1} xz\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

dir.

2) c_2 üzerinde ise $x = 1 - y$, $z = 0$, $dz = 0$ olup

$$\int_{c_2} xz\,dx + x\,dy - yz\,dz = \int_0^1 (1 - y)\,dy = \frac{1}{2}$$

dir.

3) c_3 üzerinde de $x = 0$, $y = 1$, $dx = dy = 0$ olup

$$\int_{c_3} xz\,dx + x\,dy - yz\,dz = \int_{c_3} - yz\,dz = \int_0^1 - z\,dz = -\frac{1}{2}$$

dir. Bunlara göre

$$\int_c xz\,dx + x\,dy - yz\,dz = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

dir.

25.1 - 4. Kapalı bir eğrinin sınırladığı alanın, eğrisel integral yardımiyle hesabı.

xoy düzleminde bir c eğrisi ile sınırlanmış, bir D bölgesi verilmiş olsun. Bu bölgenin düzgün bölge olduğunu kabul ediyoruz. Şekil 270.

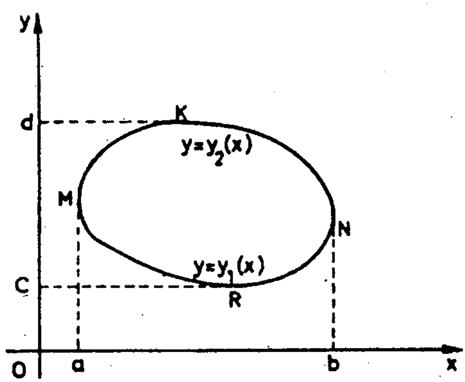
D bölgesini, alttan sınırlayan ve denklemi

$$y = y_1(x)$$

olan l_1 eğrisi ile üstten sınırlayan ve denklemi

$$y = y_2(x)$$

olan l_2 eğrisinin ox ekseni üzerindeki izdüşümü $[a\ ,\ b]$ doğru parçası olsun. $y_1(x) \leq y_2(x)$ kabul edilmektedir.



Şekil 270

Bunlara göre, bölgenin alanı

$$A = \int_a^b y_2(x) \, \mathrm{d}x - \int_a^b y_1(x) \, \mathrm{d}x$$

dir. Bu bağıntının ikinci tarafındaki birinci integral, $l_2(\widehat{MKN})$ eğrisi boyunca alınmış bir eğrisel integraldir. Çünkü l_2 boyunca $y = y_2(x)$ dir. O halde

$$\int_a^b y_2(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\widehat{MKN}} y \, \mathrm{d}x$$

yazılabilir. İkinci integral ise, $l_1(\widehat{MRN})$ eğrisi boyunca alınmış bir eğrisel integral olup

$$\int_a^b y_1(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\widehat{MRN}} y \, \mathrm{d}x$$

dir. Eğrisel integrallere ait birinci özelik'e göre (Bak. 25.1-2)

$$\int_{\widehat{MKN}} y \, \mathrm{d}x = -\int_{\widehat{NKM}} y \, \mathrm{d}x$$

yazılabilir. Bu sonuçlar A yı veren bağıntıda yerlerine konursa

$$A = -\int_{\widehat{NKM}} y \, \mathrm{d}x - \int_{\widehat{MRN}} y \, \mathrm{d}x = -\int_c y \, \mathrm{d}x$$

elde edilir.

Benzer şekilde hareket edilerek

$$A = \int_c^d x_2(y) \, \mathrm{d}y - \int_c^d x_1(y) \, \mathrm{d}y$$

$$= \int_{\widehat{RNK}} x \, \mathrm{d}y - \int_{\widehat{RMK}} x \, \mathrm{d}y$$

$$= \int_{\widehat{RNK}} x \, \mathrm{d}y + \int_{\widehat{KMR}} x \, \mathrm{d}y = \int_c x \, \mathrm{d}y$$

bulunur. Burada, $x = x_2(y)$, $\widehat{RNK}$ eğrisinin ve $x = x_1(y)$ de $\widehat{RMK}$ eğrisinin denklemi olarak ele alınmıştır. Bu suretle elde edilen

$$A = -\int_c y\,dx \quad , \quad A = \int_c x\,dy$$

bağıntıları taraf tarafa toplanırsa

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\oint_c x\,dy - y\,dx}$$

formülü elde edilir.

ÖRNEK. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ parametrik denklemleriyle verilmiş elipsin alanını bulunuz.

$$A = \frac{1}{2}\int_c x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [a\cos t \cdot b\cos t - b\sin t\,(-a\sin t)]\,dt$$

$$A = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab$$

25.1 - 5. Green formülü. (Riemann formülü)

Bu kısımda, bir D bölgesindeki iki katlı integrali, bu bölgenin c çevresi boyunca hesaplanacak bir eğrisel integral ile göstereceğiz.

D bölgesi, xoy düzleminde bir c eğrisi ile sınırlanmış ve ox , oy ye göre düzgün olan bir bölge olsun. Bu bölgenin alttan $y = y_1(x)$ ve üstten $y = y_2(x)$ eğrileri ile sınırlandığını ve $y_1(x) \leq y_2(x)$; $a \leq x \leq b$ olduğunu kabul edelim. Bu iki eğri c kapalı çevresini oluştururlar. Şekil 270.

$P(x, y)$ ve $Q(x, y)$ gibi iki fonksiyon ve bu fonksiyonların kısmi türevleri D bölgesinde sürekli olsunlar.

$$\iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\,dx\,dy$$

iki katlı integralini göz önüne alalım. Bu integral için

$$\iint\limits_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \Big| P(x,y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \Big\{ P[x, y_2(x)] - P[x, y_1(x)] \Big\}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b P[x, y_2(x)]\,\mathrm{d}x - \int_a^b P[x, y_1(x)]\,\mathrm{d}x \qquad (1)$$

yazılabilir. $\int_a^b P[x, y_2(x)]\,\mathrm{d}x$ integralinin, nümerik olarak

$$\int_{\widehat{MKN}} P(x,y)\,\mathrm{d}x$$

eğrisel integraline eşit olduğu kolayca söylenebilir. $\widehat{MKN}$ eğrisi, parametrik denklemleri $x = x$, $y = y_2(x)$ olan eğridir. Bunlara göre

$$\int_a^b P[x, y_2(x)]\,\mathrm{d}x = \int_{\widehat{MKN}} P(x,y)\,\mathrm{d}x$$

yazılabilir. Benzer şekilde $\int_a^b P[x, y_1(x)]\,\mathrm{d}x$ integralinin de nümerik olarak

$$\int_a^b P[x, y_1(x)]\,\mathrm{d}x = \int_{\widehat{MRN}} P(x,y)\,\mathrm{d}x$$

integraline eşit olduğu gösterilebilir. Bu sonuçlar (1) bağıntısında yerlerine konursa,

$$\iint\limits_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\widehat{MKN}} P(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_{\widehat{MRN}} P(x,y)\,\mathrm{d}x$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\int_{\widehat{MKN}} P(x, y)\, dx = -\int_{\widehat{NKM}} P(x, y)\, dx$$

olarak

$$\iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{\widehat{NKM}} P(x, y)\, dx - \int_{\widehat{MRN}} P(x, y)\, dx$$

$$= -\left[\int_{\widehat{MRN}} P(x, y)\, dx + \int_{\widehat{NKM}} P(x, y)\, dx\right]$$

ve buradan da

$$\iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\, dx\, dy = -\oint_c P(x, y)\, dx$$

elde edilir.

Aynı şekilde hareket edilerek

$$\iint_D \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\, dx\, dy = \oint_c Q(x, y)\, dy$$

olduğu gösterilebilir. Bu son iki bağıntı taraf tarafa çıkarılırsa

$$\boxed{\oint_c P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\right) dx\, dy}$$

bulunur. Bu formül *Green* veya *Riemann formülü* adını alır. Bu formül, *D bölgesini sınırlayan kapalı c eğrisi boyunca hesaplanacak bir eğrisel integrali, D bölgesi içindeki iki katlı integrale dönüştürür.*

Green formülünde özel olarak, $Q(x, y) = x$, $P(x, y) = -y$ alınır ve D bölgesinin alanı A ile gösterilirse

$$\oint_c (x\,dy - y\,dx) = \iint_D (1+1)\,dx\,dy = 2\iint_D dx\,dy = 2A$$

olarak, 25.1-4 de bulunan

$$A = \frac{1}{2}\oint_c x\,dy - y\,dx$$

alan formülü elde edilir.

ÖRNEK 1. c çevresi $x^2 + y^2 = 1$ çemberi olduğuna göre

$$\oint_c 4xy^3\ dx + 6x^2y^2\ dy$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

Green formülünü uygularsak

$$\oint_c 4xy^3\,dx + 6x^2y^2\,dy = \iint_D (12xy^2 - 12xy^2)\,dx\,dy = 0$$

bulunur.

ÖRNEK 2. c çevresi $x^2 + 4y^2 = 4$ elipsi olduğuna göre

$$\oint_c (2x - y)\,dx + (x + 3y)\,dy$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

Green formülünü uygularsak

$$\oint_c (2x - y)\,dx + (x + 3y)\,dy = \iint_D (1+1)\,dx\,dy = 2\iint_D dx\,dy$$

$$= 2\ .\ D \text{ nin alanı } = 4\pi$$

ÖRNEK 3. c eğrisi birim yarıçaplı bir çember olduğuna göre

$$\oint_c (x^3 - y^3)\,dx + (y^3 + x^3)\,dy$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

$$\oint_c (x^3 - y^3)\,dx + (y^3 + x^3)\,dy = \iint_D (3x^2 + 3y^2)\,dx\,dy$$

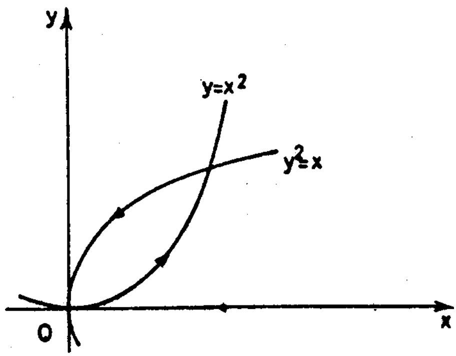
$$= 3\iint \rho^2 . \rho\,d\rho\,d\theta = 3\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \rho^3\,d\rho\right)d\theta$$

$$= \frac{3\pi}{2}$$

ÖRNEK 4. c eğrisi $y = x^2$ ve $y^2 = x$ eğrilerinin sınırladığı kapalı eğri olduğuna göre (Şekil 271)

$$\oint_c (2xy - x^2)\,dx + (x + y^2)\,dy$$

eğrisel integralini hesaplayınız.



Şekil : 271

Bu eğrisel integrale Green formülünü uygularsak

$$= \iint_D (1 - 2x)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x)\,dy\right)dx = \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2)\,dx$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{x} - 2x^{3/2} - x^2 + 2x^3)\,dx = \frac{1}{30}$$

ÖRNEK 5. Green formülünden faydalanarak

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\, dy = \oint_c \frac{\partial u}{\partial n}\, ds$$

olduğunu gösteriniz.

$$Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad P(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

kabul edilerek Green formülü uygulanırsa

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\, dy = \oint_c -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

elde edilir. İkinci taraftaki bağıntı için

$$-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dy}{ds}\right) ds$$

yazılabilir. Diğer taraftan

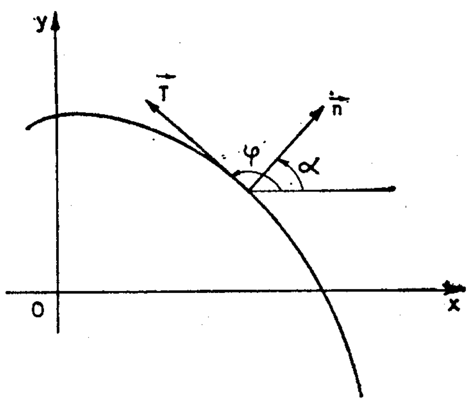
$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi \quad , \quad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi$$

ve $\alpha = \varphi - \frac{\pi}{2}$ olup (Şekil 272)

$$\cos\alpha = \sin\varphi = \frac{dy}{ds}$$

$$\sin\alpha = -\cos\varphi = -\frac{dx}{ds}$$



Şekil : 272

dır. Bunlar yukarıda yerlerine konursa

$$-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dy}{ds}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha=\frac{\partial u}{\partial n}$$

$$\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dy}{ds}\right)ds=\frac{\partial u}{\partial n}\,ds$$

elde edilir. Bunlara göre

$$\boxed{\iint_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dx\,dy=\oint_c\frac{\partial u}{\partial n}\,ds}$$

dir.

ÖRNEK 6. $\vec{F}=F_1\vec{i}+F_2\vec{j}$ ise

$$\iint_D(\nabla\cdot\vec{F})\,dx\,dy=\oint_c\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$$

olduğunu gösteriniz. ($\vec{n}$ normal birim vektörüdür).

$$\nabla\cdot\vec{F}=\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}$$

olarak

$$\iint_D(\nabla\cdot\vec{F})\,dx\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)dx\,dy$$

yazılabilir.

$$Q(x,y)=F_1\quad;\quad P(x,y)=-F_2$$

kabul edilerek ikinci taraftaki iki katlı integrale Green formülü uygulanırsa

$$\iint_D(\nabla\cdot\vec{F})\,dx\,dy=\oint_c-F_2\,dx+F_1\,dy$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$- F_2 \, dx + F_1 \, dy = \left(- F_2 \frac{dx}{ds} + F_1 \frac{dy}{ds} \right) ds$$

$$= (F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j}) \cdot \left(\frac{dy}{ds} \vec{i} - \frac{dx}{ds} \vec{j} \right) ds$$

yazılabilir. Şekil 272 den

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi \quad , \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi \quad \text{ve} \quad \varphi = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

olup

$$\frac{dx}{ds} = - \sin \alpha \quad , \quad \frac{dy}{ds} = \cos \alpha$$

olarak

$$- F_2 \, dx + F_1 \, dy = (F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j}) \cdot (\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \; \sin \alpha) \, ds$$

$$= (F_1 \cos \alpha + F_2 \sin \alpha) \, ds = \vec{F} \cdot \vec{n} \; ds$$

ve

$$\boxed{\iint_D (\nabla \cdot \vec{F}) \, dx \, dy = \oint_c \vec{F} \cdot \vec{n} \; ds}$$

dir.

ÖRNEK 7. $\vec{F} = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j}$ ise

$$\iint_D (\nabla \wedge \vec{F}) \cdot \vec{k} \; dx \, dy = \oint_c \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds$$

olduğunu gösteriniz.

$$\nabla \wedge \vec{F} = \text{rot}\, \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\partial F_2}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$(\nabla \wedge \vec{F}) \cdot \vec{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

olarak

$$\iint_D (\nabla \wedge \vec{F}) \cdot \vec{k}\, dx\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy$$

elde edilir. $Q = F_2$, $P = F_1$ kabul ederek, ikinci tarafa Green formülü uygulanırsa

$$\iint_D (\nabla \wedge \vec{F}) \cdot \vec{k}\, dx\, dy = \oint_c F_1\, dx + F_2\, dy$$

bulunur. Diğer taraftan

$$F_1\, dx + F_2\, dy = \left(F_1 \frac{dx}{ds} + F_2 \frac{dy}{ds}\right) ds$$

$$= (F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j}) \cdot \left(\frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j}\right) ds$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$$

olarak

$$\boxed{\iint_D (\nabla \wedge \vec{F}) \cdot \vec{k}\, dx\, dy = \iint_D \text{rot}\, \vec{F} \cdot \vec{k}\, dx\, dy = \oint_c \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds}$$

dır. (Green formülünün vektöryel şekli)

25.1 - 6. Bir eğrisel integralin, integrasyon yoluna bağlı olmaması şartları.

$\int_{(M)}^{(N)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ eğrisel integralini gözönüne alalım. Bir D bölgesi içinde (M) den (N) ye giden bir yol c eğrisi olsun. $P(x, y)$ ve $Q(x, y)$ fonksiyonları, gözönüne alınan D bölgesi içinde, sürekli kısmi türevlere malik olsunlar. Şimdi hangi şartlarda, bu eğrisel integralin, c eğrisinin şekline bağlı olmayıp, yalnız M ve N noktalarının durumuna bağlı olabileceğini araştıralım.

D bölgesinde M ve N noktalarını birleştiren $\widehat{MRN}$ ve $\widehat{MKN}$ keyfi eğrilerini göz önüne alalım. $MRNKM$ yolu c eğrisi olarak seçilmiş olsun. Integral yola bağlı değilse

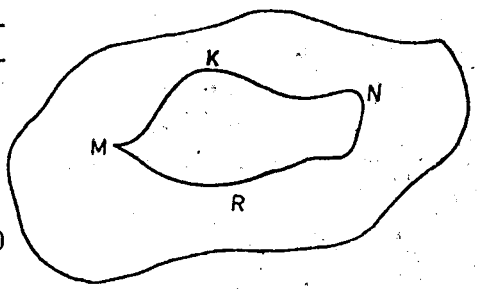
$$\int_{\widehat{MRN}} P\,dx + Q\,dy = \int_{\widehat{MKN}} P\,dx + Q\,dy$$

yanı

$$\int_{\widehat{MRN}} P\,dx + Q\,dy - \int_{\widehat{MKN}} P\,dx + Q\,dy = 0$$

olmalıdır. Eğrisel integrale ait birinci özeliğin uygulanmasile bu bağıntı

$$\int_{\widehat{MRN}} P\,dx + Q\,dy + \int_{\widehat{NKM}} P\,dx + Q\,dy = 0$$



Şekil : 273

şeklinde yazılabilir. Buraya ikinci özelik uygulanırsa

$$\oint_{c} P\,dx + Q\,dy = 0$$

elde edilir. Bu sonuncu formüldeki eğrisel integral, $\widehat{MRN}$, $\widehat{NKM}$ eğrilerinin meydana getirdiği c eğrisi boyunca alınmıştır. Bu çevrenin keyfi olarak düşünüldüğü bilinmektedir.

Buna göre, M ve N noktalarını birleştiren keyfi bir eğri üzerinde hesaplanmış eğrisel integralin, bu yola bağlı olmayıp, yalnız verilen iki noktanın durumuna bağlı olması için, bu integralin D bölgesi içindeki her basit kapalı çevre boyunca sıfıra eşit olması gerekir.

Şimdi de, $\int_c P\,dx + Q\,dy$ eğrisel integralinin herhangibir kapalı çevre boyunca sıfır olabilmesi için $P(x, y)$, $Q(x, y)$ fonksiyonlarının hangi şartları gerçekleştirmesi gerektiğini inceleyelim.

TEOREM 1. $P(x, y)$ ve $Q(x, y)$ fonksiyonları $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ kısmi türevleri ile birlikte bir D bölgesinde tanımlı ve sürekli iki fonksiyon olsun. Bu bölgeyi sınırlayan kapalı c eğrisi boyunca hesaplanacak,

$$\oint_c P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

eğrisel integralinin sıfıra eşit olabilmesi için gerek ve yeter şart, D bölgesinin bütün noktalarında

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

olmasıdır.

İspat. D bölgesi içinde keyfi kapalı bir c çevresi göz önüne alalım ve bu çevreye karşılık Green formülünü yazalım.

$$\oint_c P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Eğer

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ise ikinci taraf sıfıra eşit olacağından

$$\oint_c P\,dx + Q\,dy = 0$$

olacaktır. O halde teoremde ortaya atılmış olan

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

şartının yeterli olduğu gösterilmiş olmaktadır.

Şimdi de bu şartın gerekli olduğunu gösterelim. Bunun için de

$$\oint_c P\,dx + Q\,dy = 0$$

olduğunu ancak

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

şartının sağlanmadığını yani, D bölgesinin bir noktasında

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$$

olduğunu farzedelim. Örneğin $M(x_0\,, y_0)$ noktasında

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$$

olsun. Bu eşitsizliğin birinci tarafı, sürekli bir fonksiyon olup $M(x_0\,, y_0)$ noktasını içeren, yeter derecede küçük D' bölgesinde, bütün noktalar için pozitifdir ve $\delta > 0$ sayısından daha büyüktür.

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$ farkının bu bölgede, iki katlı integralini hesaplıyalım. İntegral pozitifdir. Buna göre

$$\iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y > \iint_{D'} \delta\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \delta \iint_{D'} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \delta \times D'\textit{nün alanı} > 0$$

yazılabilir. Bu son eşitsizliğin birinci tarafı, Green formülüne göre D' bölgesinin c' çevresinde alınmış bir eğrisel integrale eşittir ve hipotez gereğince sıfıra eşittir. Yukarıdaki eşitsizlik ise bu şartın aksini ifade etmektedir. O halde $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$ nin D' bölgesinin bir noktasında sıfırdan farklı olmasına ait olan hipotezimiz yanlıştır. Buna göre D bölgesinin her noktasında

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

olmalıdır. Buna göre teorem ispatlanmış olur.

Bu teoremden şu sonuç çıkarılabilir.

TEOREM 2. $\displaystyle\int_c P\, \mathrm{d}x + Q\, \mathrm{d}y$ *integralinde* $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *ise integralin değeri, integrasyon yoluna bağlı değildir.*

Çok değişkenli fonksiyonlar teorisinden

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

şartını sağlıyan $P\, \mathrm{d}x + Q\, \mathrm{d}y$ ifadesinin bir $U(x, y)$ fonksiyonunun toplam diferansieli yani

$$P(x, y)\, \mathrm{d}x + Q(x, y)\, \mathrm{d}y = \mathrm{d}U(x, y)$$

olduğunu biliriz. Burada

$$P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} \quad ; \quad Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$$

dir. Şimdi de, bu şartlar dahilinde M ve N noktalarını birleştiren keyfi bir c eğrisi boyunca alınmış

$$\int_{(M)}^{(N)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

eğrisel integralinin, $U(x, y)$ fonksiyonunun bu noktalardaki değerleri farkına eşit yani,

$$\boxed{\int_{(M)}^{(N)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_{(M)}^{(N)} dU(x, y) = U(N) - U(M)}$$

olduğunu gösterelim.

$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ ifadesi $U(x, y)$ fonksiyonunun toplam diferansieli yani,

$$P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} \quad ; \quad Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$$

ise, eğrisel integral

$$\int_{(M)}^{(N)} \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy$$

şeklinde yazılabilir. Bu integrali hesaplamak için, M ve N yi birleştiren c eğrisinin

$$x = \varphi(t) \quad , \quad y = \psi(t)$$

parametrik denklemlerini göz önüne alalım. Parametrenin $t = t_1$ değeri M noktasına ve $t = t_2$ değeri de N noktasına karşılık değerler olsun. Bu takdirde eğrisel integral

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) dt$$

şekline girer. Parantez içindeki ifade

$$U(x, y) = U[\varphi(t), \psi(t)]$$

fonksiyonunun t ye göre $\frac{dU}{dt}$ toplam türevidir. Buna göre

$$\int_{(M)}^{(N)} P\,dx + Q\,dy = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dU}{dt}\,dt = \Big| U[\varphi(t), \psi(t)] \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$= U[\varphi(t_2), \psi(t_2)] - U[\varphi(t_1), \psi(t_1)]$$

$$= U(N) - U(M)$$

dir. Buradan görülüyor ki *bir tam diferansielin eğrisel integrali, integrasyon yoluna bağlı değildir.*

Diğer taraftan $P\,dx + Q\,dy = dU(x, y)$ ise

$$\vec{F} = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}$$

vektörü $U(x, y)$ fonksiyonunun gradyen vektörüdür. Gradyeni $P(x, y)\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j}$ olan $U(x, y)$ fonksiyonuna bu vektörün *potansiel* i denir. O halde

$$\text{grad}\, U(x, y) = \vec{F}$$

ise

$$\int_{(M)}^{(N)} \vec{F}.d\vec{r} = \Big| U(x,y) \Big|_{(M)}^{(N)} = \vec{F} \textit{ nin potansieli}$$

$$= (M) \textit{ den } (N) \textit{ ye giden birim kütlenin yaptığı iş.}$$

İHTAR. $\int_c \vec{F}.d\vec{r}$ in yola bağlı olmaması için $\vec{F} = \text{grad}\, U(x, y)$ eşitliğini sağlıyan bir $U(x, y)$ fonksiyonunun mevcut olması gerekir. Bu sonuç

$$\text{rot}\, \vec{F} = 0$$

olması şeklinde de ifade edilebilir.

Bir uzay eğrisi boyunca alınmış eğrisel integraller için de aynı özelik mevcuttur.

$$P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

toplam diferansielinde

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

şartları mevcut ise bu toplam diferansiel bir tam diferansieldir; yani,

$$\mathrm{d}U(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

eşitliğini sağlıyan bir $U(x, y, z)$ fonksiyonu mevcuttur.

$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ bir tam diferansiel ise

$$\int_{\widehat{MN}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

eğrisel integrali yola bağlı değildir ve değeri

$$\int_{(M)}^{(N)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = U(N) - U(M)$$

dır. Diğer bir deyişle

$$\int_{\widehat{MN}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

eğrisel integralinin yola bağlı olmaması

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U(x, y, z) = \nabla U$$

eşitliğini sağlıyan bir $U(x, y, z)$ fonksiyonunun mevcut olması veya

$$\operatorname{rot} \vec{F} = 0$$

olması ile mümkündür.

Buna göre

$$dU = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

ise

$$\int_{\widehat{MN}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\widehat{MN}} \nabla U \,.\, d\vec{r} = U(N) - U(M)$$

dir.

ÖRNEK 1. $\oint_c (x^2 y \cos x + 2xy \sin x - y^2 e^x)\,dx + (x^2 \sin x - 2y\,e^x)\,dy$ eğrisel integralini $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ eğrisi boyunca hesaplayınız.

c eğrisi kapalı eğridir.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2 \cos x + 2x \sin x - 2y\,e^x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = x^2 \cos x + 2x \sin x - 2y\,e^x$$

olarak

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

dir. O halde integral yola bağlı değil ve eğri kapalı bir eğri olup integral sıfıra eşittir.

ÖRNEK 2. $I = \int_{(M)}^{(N)} (6xy^2 - y^3)\,dx + (6x^2 y - 3xy^2)\,dy$ integralinin, $M(1,\ 2)$ ve $N(3,\ 4)$ noktaları arasındaki yola bağlı olmadığını gösteriniz ve integralin değerini bulunuz.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy - 3y^2 \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy - 3y^2$$

olarak

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

dir. O halde integral yola bağlı değildir. (Bak. *TEOREM 2*)

$$P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} = 6xy^2 - y^3$$

olup

$$U(x, y) = 3x^2y^2 - xy^3 + f(y)$$

dir. $f(y)$ yi bulmak üzere

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2 y - 3xy^2 + f'(y) = 6x^2 y - 3xy^2$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$f'(y) = 0 \quad , \quad f(y) = c$$

bulunur. Buna göre

$$U(x, y) = 3x^2y^2 - xy^3 + c$$

olup

$$I = \int_{(M)}^{(N)} \mathrm{d}\,(3x^2 y^2 - xy^3 + c) = \left| 3x^2 y^2 - xy^3 + c \right|_{(1,2)}^{(3,4)} = 236$$

dir.

ÖRNEK 3. c eğrisi $M(0,0,1)$ den $N(1, \frac{\pi}{4}, 2)$ ye giden herhangibir yol olduğuna göre

$$I = \int_c 2xyz^2\,\mathrm{d}x + (x^2z^2 + z\cos yz)\,\mathrm{d}y + (2x^2yz + y\cos yz)\,\mathrm{d}z$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xz^2 \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xz^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 2x^2 z + \cos yz - zy \sin yz \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 2x^2 z + \cos yz - yz \sin yz$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 4xyz \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 4xyz$$

ve

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

olup integrant tam diferansieldir. Buna göre

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y, z) = 2xyz^2$$

olup

$$U(x, y, z) = x^2yz^2 + h(y, z)$$

dir. $h(y, z)$ yi bulmak üzere

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 z^2 + \frac{\partial h}{\partial y} = Q(x, y, z) = x^2 z^2 + z \cos yz$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\frac{\partial h}{\partial y} = z \cos yz \quad ; \quad h(y, z) = \sin yz + \varphi(z)$$

bulunur. Şimdi de $\varphi(z)$ yi bulmak üzere

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 2x^2 yz + y \cos yz + \varphi'(z) = R(x, y, z) = 2x^2 yz + y \cos yz$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\varphi'(z) = 0 \quad ; \quad \varphi(z) = c$$

bulunur. Buna göre

$$U(x, y, z) = x^2 yz^2 + \sin yz + c$$

olup

$$I = \int_{(M)}^{(N)} \mathrm{d}\,(x^2yz^2 + \sin yz + c) = \left| x^2 yz^2 + \sin yz + c \right|_{(0,0,1)}^{\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)} = \pi + 1$$

dir.

ÖRNEK 4. c eğrisi $(0, \frac{\pi}{4}, 1)$ den $(0, 1, \frac{\pi}{4})$ e giden doğru parçası ile $(0, 1, \frac{\pi}{4})$ den $(\frac{\pi}{2}, 1, 0)$ a giden doğru parçasının meydana getirdiği eğri ve

$$U(x, y, z) = \sin xy + \cos yz + \sin xz$$

olduğuna göre

$$\int_c \nabla U . \mathrm{d}\vec{r}$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

$$\nabla U . \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}U$$

olup integral yola bağlı değildir. Buna göre

$$\int_c \nabla U . \mathrm{d}\vec{r} = \int_c \mathrm{d}U = \left| U(x, y, z) \right|_{\left(0, \frac{\pi}{4}, 1\right)}^{\left(\frac{\pi}{2}, 1, 0\right)}$$

$$= \left| \sin xy + \cos yz + \sin xz \right|_{\left(0, \frac{\pi}{4}, 1\right)}^{\left(\frac{\pi}{2}, 1, 0\right)}$$

$$= 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

dir.

25.1 - 7. Yay uzunluğuna göre eğrisel integral.

Bazen, bir $P(x, y)$ fonksiyonunun eğrisel integrali, c integrasyon eğrisinin yay uzunluğuna göre hesaplanır. Bu halde

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} P(x_i', y_i') \Delta s_i = \int_c P(x, y)\, ds$$

dir. Burada ds yay diferansielidir. Bu şekildeki integraller de yukarıda göz önüne alınan eğrisel integraller gibi hesaplanır. c eğrisinin

$$x = \varphi(t) \quad , \quad y = \psi(t)$$

parametrik denklemleri ile verilmiş olduğunu farzedelim. $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ fonksiyonları t nin sürekli fonksiyonları olsunlar. c eğrisinin uç noktalarına karşılık gelen t parametresinin değerleri α ve β olsun.

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

olduğu bilindiğine göre

$$\boxed{\int_c P(x, y)\, ds = \int_\alpha^\beta P[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}\, dt}$$

olur.

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \gamma(t)$ parametrik denklemleriyle verilmiş bir uzay eğrisi için yay uzunluğuna göre eğrisel integral de

$$\boxed{\int_c P(x, y, z)\, ds = \int_\alpha^\beta P[\varphi(t), \psi(t), \gamma(t)] \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2}\, dt}$$

bağıntısı ile hesaplanır.

ÖRNEK 1. $P(x, y) = \left(\frac{a^2 y^2}{b^2} + \frac{b^2 x^2}{a^2}\right)^{1/2}$ ve c eğrisi de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

elipsi olduğuna göre

$$\int_c P(x, y)\, ds$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

Elipsin parametrik denklemleri

$$x = a \cos\theta \quad , \quad y = b \sin\theta \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

olup

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}\; d\theta$$

dır.

$$P(x, y) = (a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^{1/2}$$

ve

$$P(x, y)\, ds = (a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)\, d\theta$$

olup

$$\int_c P(x, y)\, ds = \int_0^{2\pi} (a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)\, d\theta = \pi (a^2 + b^2)$$

dir.

ÖRNEK 2. c eğrisi $y = \sin x$ eğrisinin $(0,0)$,$(\frac{\pi}{2}, 1)$ noktaları arasındaki kısmı olduğuna göre

$$\int_c y^2 \sin^3 x \sqrt{1 + \cos^2 x}\; ds$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\; dx = \sqrt{1 + \cos^2 x}\; dx$$

olup

$$\int_c y^2 \sin^3 x \sqrt{1+\cos^2 x}\, ds = \int_0^{\pi/2} \sin^5 x\,(1+\cos^2 x)\, dx = \frac{64}{105}$$

dir.

25.2 Yüzey integralleri.

25.2 - 1. Tanım.

$L(x, y, z)$, bir S yüzey parçası üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. S, in düzgün yüzey olduğunu kabul ediyoruz. S yüzeyinin denklemi, S i içine alan bir bölgede sürekli türevlere malikse, düzgün bir yüzeydir.

S yüzeyini herhangi n parçaya bölelim. Bu parçaların alanları ΔS_i olsun. Bu yüzey parçalarının herbirinde (x_i', y_i', z_i') şeklinde birer nokta seçelim ve $L(x, y, z)$ fonksiyonunun bu noktalardaki değerlerini hesaplıyalım. Sonra da bu değerleri, noktaların ait oldukları yüzey parçalarının alanları ile çarpalım ve bu çarpımları toplayalım. Bu suretle

$$\sum_{i=1}^{n} L(x_i', y_i', z_i')\, \Delta S_i$$

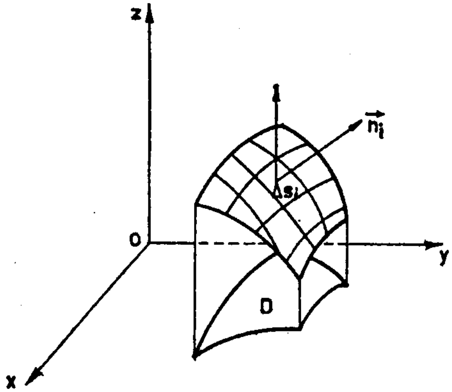
toplamı elde edilir. Şimdi de bu toplamın, her ΔS_i alanı sıfıra yaklaşması şartiyle, n in sınırsız olarak artırılması halindeki limitini hesaplıyalım. Bu limit,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} L(x_i', y_i', z_i')\, \Delta S_i = \iint_S L(x, y, z)\, dS$$

olup, sağ taraftaki integrale *yüzey integrali* adı verilir.

S yüzeyi $z = f(x, y)$ denklemi ile verilmişse, yüzey integrali

$$\iint_S L(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_D L[x,y,f(x,y)] \sec \gamma \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



Şekil : 274

iki katlı integraline dönüşür. Buradaki γ, yüzeyin yukarıya doğru olan normali ile oz ekseninin oluşturduğu açıdır. D ise, yüzeyin xoy düzlemindeki izdüşümü olan bölgedir. Şekil 274. Bu son bağıntı 23.1-9. da bulduğumuz

$$\iint_D \sec \gamma \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

veya daha kesin olarak

$$\Delta S = \sec \gamma \,\Delta x\,\Delta y$$

ifadesinden çıkarılabilir.

S yüzeyi eğer,

$$x = f(u, v) \quad , \quad y = g(u, v) \quad , \quad z = h(u, v)$$

parametrik denklemleri ile verilmiş ise yukarıdaki yüzey integrali

$$\iint_S L(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_D L[f(u,v)\,,\,g(u,v)\,,\,h(u,v)]\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

şekline girer. Bu bağıntı da

$$\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

bağıntısından çıkarılabilir. (Bak. 23.1-9)

25.2 - 2. Yüzey integrallerinin vektöryel tanımı.

Bir λ eğrisi ile sınırlanmış bir S yüzeyinin, verilmiş olduğunu farzedelim. Bu yüzeyin herbir noktasında, normal birim vektörü ile belirtilen bir pozitif yön tanımlanmış olsun. $\vec{n}(P)$ normalinin doğrultu kosinüsleri, yüzey üzerindeki noktaların koordinatlarının sürekli fonksiyonları olsunlar.

Yüzeyin her noktasında tanımlanmış bir

$$\vec{F} = L(x, y, z)\,\vec{i} + M(x, y, z)\,\vec{j} + N(x, y, z)\,\vec{k}$$

vektörü verilmiş olsun. L, M, N ler x, y, z lerin sürekli fonksiyonları olsunlar.

S yüzeyinin bir tarafını pozitif, diğer tarafını negatif olarak alalım. $\vec{n}$ vektörü, yüzeyin bir P noktasındaki normal birim vektörü olsun ve yüzeyin pozitif olan tarafına yönelmiş bulunsun.

Yüzeyi keyfi olarak herhangi m parçaya bölelim. Bu parçaların alanları ΔS_i olsun. Herbir yüzey parçası üzerinde keyfi bir P_i noktası alalım ve

$$\sum \vec{F}(P_i)\,.\,\vec{n}(P_i)\,\Delta S_i$$

toplamını oluşturalım. $\vec{F}(P_i)$, $\vec{F}$ vektörünün P_i noktasındaki değeri; $\vec{n}(P_i)$ ise, P_i noktasındaki normal birim vektörüdür. ΔS_i alanlarının en büyük çapı sıfıra yaklaştığı zaman yukarıdaki toplamın limiti, tanım olarak bir yüzey integraline yaklaşır ve bu integral

$$\iint_S \vec{F}\,.\,\vec{n}\;dS$$

şeklinde gösterilir. O halde

$$\boxed{\lim_{\text{çap}\,\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{m} \vec{F}_i\,.\,\vec{n}_i\,\Delta S_i = \iint_S \vec{F}\,.\,\vec{n}\;dS}$$

dir. *S yüzeyinin her noktasında, bu nokta ile sürekli olarak değişen, bir teğet düzlem mevcut ve $\vec{F}$ vektör fonksiyonu bu yüzeyde sürekli ise, bu limit mevcuttur.* (Yüzey integrallerinin mevcudiyet teoremi)

Yukarıdaki toplamın herbir terimi

$$\vec{F}_i \,.\, \vec{n}_i \,\Delta S_i = \left|\vec{F}_i\right| \Delta S_i \cos(\vec{n}_i \,, \vec{F}_i)$$

şeklindedir. Bu çarpım, tabanı ΔS_i ve yüksekliği $\left|\vec{F}_i\right| \cos(\vec{n}_i \,, \vec{F}_i)$ olan bir silindirin hacmına eşittir. $\vec{F}$ eğer S yüzeyinden geçen sıvının hızı ise, $\vec{F}_i \,.\, \vec{n}_i \,\Delta S_i$ çarpımı, ΔS_i yüzeyinden $\vec{n}_i$ doğrultusunda, birim zamanda geçen sıvı miktarına eşittir. O halde,

$$\iint\limits_S \vec{F} \,.\, \vec{n} \,\mathrm{d}S$$

yüzey integrali, $\vec{F}$ sıvının gözönüne alınan noktadaki hız vektörü olarak, S yüzeyinden birim zamanda, pozitif yönde geçen toplam sıvı miktarını verir. Bu takdirde

$$\iint\limits_S \vec{F} \,.\, \vec{n} \,\mathrm{d}S$$

yüzey integraline, $\vec{F}$ vektör alanının S yüzeyinden geçen akısı denir.

İHTAR. S yüzeyi S_1 , $S_2, \ldots, S_k$ parçalarına ayrılmışsa, yüzey integrali tanımından,

$$\iint\limits_S \vec{F} \,.\, \vec{n} \,\mathrm{d}S = \iint\limits_{S_1} \vec{F} \,.\, \vec{n} \,\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} \vec{F} \,.\, \vec{n} \,\mathrm{d}S + \ldots\ldots + \iint\limits_{S_k} \vec{F} \,.\, \vec{n} \,\mathrm{d}S$$

yazılabilir.

$\vec{n}$ normal birim vektörü

$$\vec{n} = \cos(\vec{n}, x)\, \vec{i} + \cos(\vec{n}, y)\, \vec{j} + \cos(\vec{n}, z)\, \vec{k}$$

ve $\vec{F}$ vektörü de

$$\vec{F} = L(x, y, z)\,\vec{i} + M(x, y, z)\,\vec{j} + N(x, y, z)\,\vec{k}$$

olduğuna göre

$$\iint_S \vec{F}\,.\,\vec{n}\,dS = \iint_S [L\cos(\vec{n}, x) + M\cos(\vec{n}, y) + N\cos(\vec{n}, z)]\,dS$$

$$\boxed{\iint_S \vec{F}\,.\,\vec{n}\,dS = \iint_S (L\cos\alpha + M\cos\beta + N\cos\gamma)\,dS}$$

dır. $\Delta S\cos(\vec{n}, z)$ çarpımı, ΔS alanının xoy düzlemi üzerindeki izdüşümüdür. Diğer çarpımlar da gözönüne alınırsa :

$$\Delta S\cos(\vec{n}, x) = \Delta S_{yz} \quad ; \quad \Delta S\cos(\vec{n}, y) = \Delta S_{zx}$$

$$\Delta S\cos(\vec{n}, z) = \Delta S_{xy}$$

yazılabilir. ΔS_{yz} , ΔS_{zx} , ΔS_{xy} ler ΔS alanının koordinat düzlemleri üzerindeki izdüşümleridir. Bunlara göre yüzey integrali,

$$\boxed{\begin{aligned}\iint_S \vec{F}\,.\,\vec{n}\,dS &= \iint_S [L\cos(\vec{n}, x) + M\cos(\vec{n}, y) + N\cos(\vec{n}, z)]\,dS \\ &= \iint_S L\,dy\,dz + M\,dz\,dx + N\,dx\,dy\end{aligned}}$$

şekline girer.

25.2 - 3. Yüzey integrallerinin hesabı.

I. Bir yüzey integrali, bir D düzlem bölgesinde hesaplanacak bir iki katlı integrale dönüştürülmek suretile hesaplanır. Bunu göstermek üzere

$$\iint\limits_S N(x, y, z) \cos(\vec{n}, z)\, dS$$

yüzey integralini gözönüne alalım. oz eksenine paralel her doğrunun S yüzeyini bir noktada kestiğini kabul edelim. S yüzeyi

$$z = f(x, y)$$

denklemi ile verilmiş olsun. Bu yüzeyin xoy düzlemi üzerindeki izdüşümünü D ile gösterelim. Yüzey integrallerinin tanımına göre

$$\iint\limits_S N(x, y, z) \cos(\vec{n}, z)\, dS = \lim_{çap\, \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} N(x_i, y_i, z_i) \cos(\vec{n_i}, z)\, \Delta S_i$$

dir. Bundan evvelki kısımda belirttiğimiz

$$\Delta S \cos(\vec{n}, x) = \Delta S_{yz}$$

$$\Delta S \cos(\vec{n}, y) = \Delta S_{zx}$$

$$\Delta S \cos(\vec{n}, z) = \Delta S_{xy}$$

formülleri ve $z = f(x, y)$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\iint\limits_S N \cos(\vec{n}, z)\, dS = \lim_{çap\, \Delta S_{xy} \to 0} \sum_{i=1}^{n} N[x_i, y_i, f(x_i, y_i)]\, (\Delta S_{xy})_i$$

$$= \pm \lim_{çap\, \Delta S_{xy} \to 0} \sum_{i=1}^{n} N[x_i, y_i, f(x_i, y_i)]\, |\Delta S_{xy}|_i$$

elde edilir. Bu ifadenin ikinci tarafındaki limit bir integral toplam olup, bizi $N[x, y, f(x, y)]$ fonksiyonunun D bölgesindeki iki katlı integraline götürür. Buna göre

$$\iint\limits_S N(x, y, z) \cos(\vec{n}, z)\, dS = \pm \iint\limits_D N[x, y, f(x, y)]\, dx\, dy$$

dir. + işareti $\cos(\vec{n}, z) > 0$ haline, − işareti ise $\cos(\vec{n}, z) < 0$ haline karşılık gelir.

S yüzeyi, başta ileri sürülen şartları sağlamıyorsa bu yüzey, bu şartları sağlıyan parçalara bölünür ve herbir parça üzerinde integral hesaplanır ve toplamları alınır.

II. Şimdi de, S yüzeyi $z = f(x, y)$ denklemi ve $\vec{n}$ normal birim vektörü ile verilmiş olduğuna göre

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

integralini hesaplıyalım.

S yüzeyinin herhangibir (x_1, y_1, z_1) noktasındaki teğet düzleminin denklemi

$$z - z_1 = \frac{\partial z}{\partial x}(x - x_1) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_1)$$

olduğuna göre normal birim vektörü

$$\vec{n} = \pm \frac{-\dfrac{\partial z}{\partial x}\vec{i} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

şeklindedir. Normalin içe veya dışa doğru olmasına göre $-$ veya $+$ alınır. Bu ifadenin paydası, $\vec{k}$ vektörü ile dışa doğru olan normalin oluşturduğu açı γ olarak, $\sec\gamma$ dır. Zira

$$\vec{n} \cdot \vec{k} = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

olup

$$\sec\gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

dir. Diğer taraftan $\cos\gamma\, dS = dx\, dy$ olarak

$$dS = \sec\gamma\, dx\, dy$$

dir. Bunlara göre

$$\vec{n} = \pm \frac{-\dfrac{\partial z}{\partial x}\vec{i} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}}{\sec\gamma}$$

olup

$$\vec{F}\,.\,\vec{n}\; dS = (L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}) \cdot \frac{-\dfrac{\partial z}{\partial x}\vec{i} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}}{\sec\gamma} \sec\gamma\, dx\, dy$$

$$= \left(-L\frac{\partial z}{\partial x} - M\frac{\partial z}{\partial y} + N\right) dx\, dy$$

ve

$$\iint_S \vec{F}\,.\,\vec{n}\; dS = \iint_S L\, dy\, dz + M\, dz\, dx + N\, dx\, dy$$

$$= \pm \iint_{D_{xy}} \left(-L\frac{\partial z}{\partial x} - M\frac{\partial z}{\partial y} + N\right) dx\, dy$$

dir. Benzer şekilde

$$\iint_S \vec{F}\,.\,\vec{n}\; dS = \iint_{D_{yz}} \left(-M\frac{\partial x}{\partial y} - N\frac{\partial x}{\partial z} + L\right) dy\, dz$$

$$\iint_S \vec{F}\,.\,\vec{n}\; dS = \iint_{D_{zx}} \left(-N\frac{\partial y}{\partial z} - L\frac{\partial y}{\partial x} + M\right) dz\, dx$$

olduğu gösterilebilir. D_{xy} , D_{yz} , D_{zx} ler S yüzeyinin xoy , yoz , zox düzlemleri üzerindeki izdüşümleridir.

III. S yüzeyi $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$ parametrik denklemleri ve $\vec{n}$ normal birim vektörü ile verilmişse

$$\iint_S L\,dy\,dz + M\,dz\,dx + N\,dx\,dy$$

$$= \pm \iint_D \left[L \left| \frac{D(y,z)}{D(u,v)} \right| + M \left| \frac{D(z,x)}{D(u,v)} \right| + N \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| \right] du\,dv$$

dir.

ÖRNEK 1. S yüzeyi $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresinin $z \geqq 1$ e karşılık olan kısmı olduğuna göre

$$\iint_S [x^2 + y^2 + (z - 2)^2]\,dS$$

yüzey integralini hesaplayınız.

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$z - 2 = \sqrt{4 - x^2 - y^2} - 2$$

$$x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 8 - 4\sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

olup

$$\iint_S [x^2 + y^2 + (z - 2)^2]\,dS = \iint_D (8 - 4\sqrt{4 - x^2 - y^2}) \sec\gamma\,dx\,dy$$

$$= \iint_D (8 - 4\sqrt{4 - x^2 - y^2})\,\frac{2\,dx\,dy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

$$= 8\iint_D \left(\frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} - 1 \right) dx\,dy$$

dir. D bölgesi $x^2 + y^2 = 3$ dairesidir. Bunun hesabı için de kutupsal koordinatlara geçersek :

$$= 8\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\sqrt{4-\rho^2}} - 1\right)\rho\, d\rho\right] d\theta$$

$$= 8 \,.\, 2\pi \left| -2\sqrt{4-\rho^2} - \frac{1}{2}\rho^2 \right|_0^{\sqrt{3}} = 8\pi$$

elde edilir.

ÖRNEK 2. S yüzeyi, köşeleri $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ olan üçgen olduğuna göre

$$\iint_S x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy$$

yüzey integralini hesaplayınız.

$$\iint_S x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy = \iint_D \left(-L\frac{\partial z}{\partial x} - M\frac{\partial z}{\partial y} + N\right) dx\, dy$$

$$= \iint_D (x + y + z)\, dx\, dy$$

dir. Üçgenin denklemi $x + y + z = 1$ olup $z = 1 - x - y$ ve D bölgesi de $x + y = 1$ doğrusunun $x = 0$, $y = 0$ eksenleri ile meydana getirdiği üçgen bölgedir. Buna göre

$$\iint_D (x + y + z)\, dx\, dy = \iint_D dx\, dy = D \text{ nin alanı } = \frac{1}{2}$$

dir.

ÖRNEK 3. S yüzeyi $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ yarım küresi olduğuna göre

$$\iint_S (x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma)\, dS$$

yüzey integralini hesaplayınız.

$$\iint_S (x \cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\, dS = \iint_S x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy$$

$$= \iint_D \left(-L\frac{\partial z}{\partial x} - M\frac{\partial z}{\partial y} + N\right) dx\, dy$$

$$= \iint_D \left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + z\right) dx\, dy$$

$$= \iint_D \frac{dx\, dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

dir. D bölgesi $x^2 + y^2 = 1$ dairesidir. Bu integrali hesaplamak üzere kutupsal koordinatlara geçersek,

$$\iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\, dS = \iint_D \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) d\theta$$

$$= 2\pi$$

elde edilir.

ÖRNEK 4. S yüzeyi $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin xoy düzleminin üst tarafında kalan kısmı ve $\vec{V} = -y^3\vec{i} + x^3\vec{j}$ olduğuna göre

$$\iint_S \text{rot}\,\vec{V}\,.\,\vec{n}\,dS$$

yüzey integralini hesaplayınız.

$$\text{rot}\,\vec{V} = \nabla \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & 0 \end{vmatrix} = (3x^2 + 3y^2)\,\vec{k}$$

$$\text{rot}\,\vec{V}\,.\,\vec{n} = (3x^2 + 3y^2)\,\vec{k}\,.\,(\cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k})$$

$$= (3x^2 + 3y^2)\cos\gamma$$

olarak

$$\iint_S \text{rot}\,\vec{V}\,.\,\vec{n}\;dS = \iint_S 3\,(x^2 + y^2)\cos\gamma\,dS = \iint_D 3(x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

dir. Son integrali hesaplamak için de kutupsal koordinatlara geçersek

$$\iint_S \text{rot}\,\vec{V}\,.\,\vec{n}\;dS = 3\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \rho^2\,.\,\rho\,d\rho\right)d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

elde edilir.

ÖRNEK 5. S yüzeyi, $x = u + v\ ,\ y = u - v\ ,\ z = 1 - 2u$ parametrik denklemleriyle verilmiş olan yüzey olduğuna göre

$$\iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$$

yüzey integralini hesaplayınız.

III deki bağıntıya göre

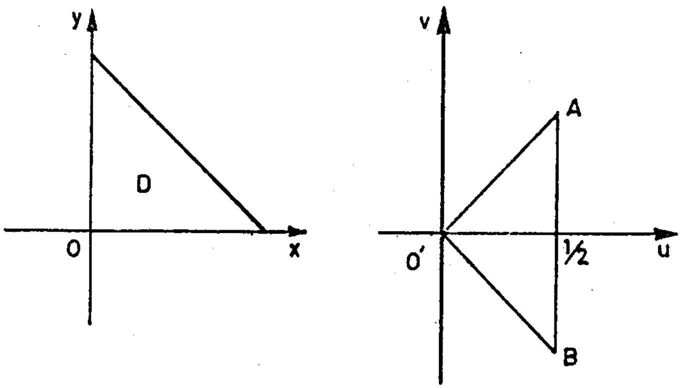
$$\iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$$

$$= \iint_D \left[x \left| \frac{D(y,z)}{D(u,v)} \right| + y \left| \frac{D(z,x)}{D(u,v)} \right| + z \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| \right] du\,dv$$

$$= \iint_{D'} [2(u+v) + 2(u-v) + 2(1-2u)]\,du\,dv$$

$$= 2 \iint_{D'} du\,dv$$

dir. D bölgesi $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$ doğrularının sınırladığı üçgen bölgesi olup D' bölgesi uv düzleminde D ye karşılık olan bölgedir. $x + y = 1$ doğrusuna $u = \frac{1}{2}$; $x = 0$ doğrusuna $u = -v$; $y = 0$ doğrusuna $u = v$ doğruları karşılık geldiğine göre D' bölgesi Şekil 275 deki $O'AB$ üçgen bölgesidir.



Şekil : 275

Buna göre

$$2 \iint_{D'} du\,dv = 2 \text{ . } D' \text{ nün alanı} = \frac{1}{2}$$

dir.

25.2 - 4. Stokes teoremi.

İki farklı tarafı olan ve bir λ kapalı eğrisi ile sınırlanmış bulunan, bir S düzgün yüzey parçası gözönüne alalım. oz e paralel her doğru S yüzeyini yalnız bir noktada kesmektedir. Yüzeyin pozitif normali, oz ile dar açı yapan normal olsun.

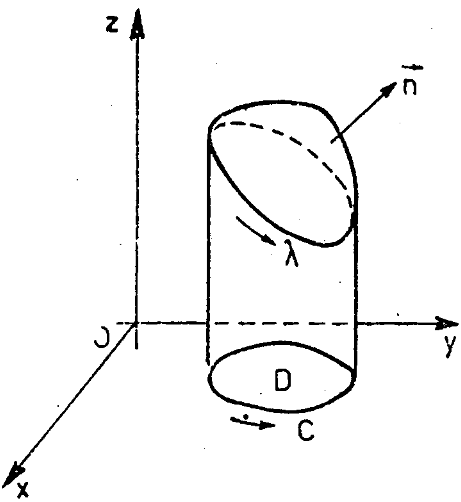
S yüzeyi $z = f(x, y)$ denklemi ile verilmiş ise normalinin doğrultu kosinüsleri,

$$\cos(\vec{n}, x) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

$$\cos(\vec{n}, y) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \tag{1}$$

$$\cos(\vec{n}, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

dir.



Şekil : 276

S yüzeyinin bir V uzay bölgesi içinde olduğunu farzedelim. Birinci mertebeden kısmi türevleriyle birlikte V bölgesi içinde sürekli olan bir $L(x, y, z)$ fonksiyonu verilmiş olsun. λ eğrisi boyunca alınmış

$$\int_{\lambda} L(x, y, z)\, dx$$

eğrisel integralini gözönüne alalım.

$z = f(x, y)$ yüzeyinin λ çevresinin xoy düzlemindeki izdüşümü c eğrisi olsun. Şekil 276. (x, y) ler c ye ait nokta-

lar olarak düşünülürse λ çervesi boyunca, $z = f(x, y)$ dir. Bunlara göre

$$\int_\lambda L(x, y, z)\,dx = \int_c L[x, y, f(x, y)]\,dx$$

yazılabilir. Bu son integral c eğrisi boyunca hesaplanacak bir eğrisel integraldir.

$$L[x, y, f(x, y)] = P(x, y)$$

$$0 = Q(x, y)$$

kabul edilerek Green formülü uygulanırsa

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_c P\,dx + Q\,dy$$

den

$$-\iint_D \frac{\partial L[x, y, f(x, y)]}{\partial y}\,dx\,dy = \int_c L[x, y, f(x, y)]\,dx$$

elde edilir. Buradaki D bölgesi S yüzeyinin xoy düzlemi üzerindeki izdüşümüdür.

$$L[x, y, f(x, y)] = L(x, y, z)$$

fonksiyonu bir bileşik fonksiyon olup y ye göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial L[x, y, f(x, y)]}{\partial y} = \frac{\partial L(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial L(x, y, z)}{\partial z} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

bulunur. $\dfrac{\partial L}{\partial y}$ nin bu ifadesi yukarıda yerine konursa

$$-\iint_D \left[\frac{\partial L(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial L(x, y, z)}{\partial z}\,\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right] dx\, dy = \int_c L[x, y, f(x, y)]\, dx$$

elde edilir.

$$\int_c L[x, y, f(x, y)]\, dx = \int_\lambda L(x, y, z)\, dx$$

olduğu da gözönüne alınırsa son bağıntı,

$$\int_\lambda L(x, y, z)\, dx = -\iint_D \frac{\partial L}{\partial y}\, dx\, dy - \iint_D \frac{\partial L}{\partial z}\,\frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy$$

şeklini alır. Bu bağıntının ikinci tarafındaki integraller yüzey integrallerine dönüştürülebilir. Gerçekten her $A(x, y, z)$ fonksiyonu için

$$\iint_S A(x, y, z) \cos(\vec{n}, z)\, dS = \iint_D A[x, y, f(x, y)]\, dx\, dy$$

eşitliği yazılabileceğinden (Bak. 25.2-3.)

$$\iint_D \frac{\partial L}{\partial y}\, dx\, dy = \iint_S \frac{\partial L}{\partial y} \cos(\vec{n}, z)\, dS$$

$$\iint_D \frac{\partial L}{\partial z}\,\frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = \iint_S \frac{\partial L}{\partial z}\,\frac{\partial f}{\partial y} \cos(\vec{n}, z)\, dS$$

eşitlikleri yazılabilir. Bunlardan ikincisini (1) formüllerini uygulayarak değiştirelim. Gerçekten (1) in ikinci ve üçüncü bağıntılarından

$$\frac{\cos(\vec{n}, y)}{\cos(\vec{n}, z)} = -\frac{\partial f}{\partial y}$$

veya

$$\frac{\partial f}{\partial y} \cos(\vec{n}, z) = -\cos(\vec{n}, y)$$

elde edilerek son integralde yerine konursa;

$$\iint_D \frac{\partial L}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \, dx \, dy = -\iint_S \frac{\partial L}{\partial z} \cos(\vec{n}, y) \, dS$$

bulunur. Şimdi de bunları yukarıda bulunan

$$\int_\lambda L(x, y, z) \, dx = -\iint_D \frac{\partial L}{\partial y} \, dx \, dy - \iint_D \frac{\partial L}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \, dx \, dy$$

bağıntısında yerlerine koyarsak

$$\int_\lambda L(x, y, z) \, dx = -\iint_S \frac{\partial L}{\partial y} \cos(\vec{n}, z) \, dS + \iint_S \frac{\partial L}{\partial z} \cos(\vec{n}, y) \, dS$$

$$\int_\lambda L(x, y, z) \, dx = \iint_S \left[-\frac{\partial L}{\partial y} \cos(\vec{n}, z) + \frac{\partial L}{\partial z} \cos(\vec{n}, y) \right] dS$$

elde edilir. λ eğrisindeki hareket yönü, normal ayaklarından başına doğru olan bir gözlem için, çevre saat ibrelerinin ters yönünde olmalıdır.

Bulunan bu formül, denklemleri $z = f(x, y)$ ve iki taraflı olan her yüzey için doğrudur.

Benzer yoldan hareket edilerek

$$\int_{\lambda} M(x, y, z)\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{S} \left[-\frac{\partial M}{\partial z}\cos(\vec{n}, x) + \frac{\partial M}{\partial x}\cos(\vec{n}, z) \right] \mathrm{d}S$$

$$\int_{\lambda} N(x, y, z)\,\mathrm{d}z = \iint\limits_{S} \left[-\frac{\partial N}{\partial x}\cos(\vec{n}, y) + \frac{\partial N}{\partial y}\cos(\vec{n}, x) \right] \mathrm{d}S$$

formülleri elde edilebilir. Bu üç formül taraf tarafa toplanırsa

$$\oint_{\lambda} L\,\mathrm{d}x + M\,\mathrm{d}y + N\,\mathrm{d}z =$$

$$= \iint\limits_{S} \left[\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) \cos(\vec{n}, x) + \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \cos(\vec{n}, y) + \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) \cos(\vec{n}, z) \right] \mathrm{d}S$$

$$= \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

formülü elde edilir ki bu formül *Stokes formülü* adını alır.

Bu formülün ikinci tarafındaki integralin içindeki $\mathrm{d}S$ in katsayısı olan bağıntının,

$$\begin{vmatrix} \cos(\vec{n}, x) & \cos(\vec{n}, y) & \cos(\vec{n}, z) \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ L & M & N \end{vmatrix}$$

determinantının, birinci satırının elemanlarına göre Laplace açılımından oluşmakta olduğu kolayca görülebilir.

Stokes formülü ile bir yüzey integralini, yüzeyin çevresi boyunca hesaplanacak bir eğrisel integrale dönüştürmek mümkün olmaktadır.

Bileşenleri

$$u_x = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \quad , \quad u_y = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$u_z = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}$$

olan bir $\vec{u}(x, y, z)$ vektörü, $\vec{F} = L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}$ vektörünün rotasyoneli olduğuna göre Stokes formülünün vektöryel ifadesi

$$\boxed{\oint_\lambda \vec{F} \,.\, d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \,.\, \vec{n} \; dS}$$

şeklinde olur. Buna göre Stokes teoremi şu şekilde ifade edilebilir : *Bir vektörün, bir yüzeyi sınırlayan kapalı çevre boyunca sirkülasyonu, vektörün rotasyonelinin bu yüzeyden geçen akısına eşittir.*

İHTAR. S yüzeyi, xoy düzlemine paralel bir düzlem parçası ise, o takdirde $\Delta z = 0$ olur ve Stokes formülünün özel hali olarak Green formülü elde edilir.

ÖRNEK 1. c eğrisi $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2$ çemberi ve $\vec{u} = -3y\vec{i} + 3x\vec{j} + \vec{k}$ olduğuna göre Stokes teoreminden faydalanarak $\int_c \vec{u} \,.\, d\vec{r}$ integralini hesaplayınız.

$$\int_c \vec{u} \,.\, d\vec{r} = \int_c -3y\, dx + 3x\, dy + dz$$

olup Stokes formülü uygulanırsa

$$\int_c \vec{u} \,.\, d\vec{r} = \iint_S (0-0)\, dy\, dz + (0-0)\, dz\, dx + (3+3)\, dx\, dy$$

$$= 6\iint_D dx\, dy = 6\pi$$

bulunur.

ÖRNEK 2. c eğrisi, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \sin t$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$ olarak

$$\int_c 2xy^2 z\, dx + 2x^2 yz\, dy + (x^2 y^2 - 2z)\, dz$$

integralini hesaplayınız.

Stokes teoremi uygulanırsa

$$= \iint_S (2x^2 y - 2x^2 y)\, dy\, dz + (2xy^2 - 2xy^2)\, dz\, dx + (4xyz - 4xyz)\, dx\, dy$$

$$= 0$$

bulunur.

ÖRNEK 3. S düzgün bir yüzey; c bu yüzeyi sınırlayan kapalı bir eğri; $\vec{a} = (a_1 , a_2 , a_3)$ sabit bir vektör ve $\vec{r} = (x, y, z)$ yer vektörü olduğuna göre

$$\oint_c (\vec{a} \wedge \vec{r}) \,.\, d\vec{r} = 2 \iint_S \vec{a} \,.\, \vec{n} \;\; dS$$

olduğunu gösteriniz.

Stokes formülünün vektöryel ifadesine göre

$$\oint_c (\vec{a} \wedge \vec{r}) \,.\, d\vec{r} = \iint_S \vec{n} \,.\, \text{rot}\, (\vec{a} \wedge \vec{r})\; dS$$

ve

$$\text{rot}\, (\vec{a} \wedge \vec{r}) = \nabla \wedge \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_2 z - a_3 y & a_3 x - a_1 z & a_1 y - a_2 x \end{vmatrix}$$

$$= 2a_1 \vec{i} + 2a_2 \vec{j} + 2a_3 \vec{k} = 2\,\vec{a}$$

olup

$$\oint_c (\vec{a} \wedge \vec{r}) \,.\, d\vec{r} = 2 \iint_S \vec{n} \,.\, \vec{a}\, dS$$

dir.

ÖRNEK 4. $\vec{A} = 2yz\,\vec{i} - (x + 3y - 2)\,\vec{j} + (x^2 + z)\,\vec{k}$ ve S yüzeyi $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$ silindirlerinin birinci bölgede sınırladıkları yüzey olduğuna göre

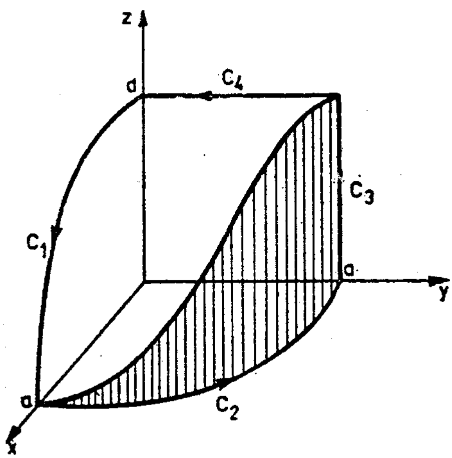
$$\iint_S (\nabla \wedge \vec{A}) \,.\, \vec{n}\, dS$$

yüzey integralini hesaplayınız. Şekil 277.

Stokes teoremine göre

$$\iint_S (\nabla \wedge \vec{A}) \,.\, \vec{n}\, dS = \oint_c \vec{A} \,.\, d\vec{r}$$

$$= \oint_c 2yz\, dx - (x + 3y - 2)\, dy + (x^2 + z)\, dz$$



Şekil : 277

dır. Diğer taraftan

$$\oint_c = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3} + \int_{c_4}$$

ve

$$\int_{c_1} (x^2 + z)\,dz = \int_a^0 (a^2 - z^2 + z)\,dz = -\frac{2a^3}{3} - \frac{a^2}{2}$$

$$\int_{c_2} -(x + 3y - 2)\,dy = \int_0^a (-\sqrt{a^2 - y^2} - 3y + 2)\,dy = -\frac{\pi a^2}{4} - \frac{3a^2}{2} + 2a$$

$$\int_{c_3} z\,dz = \frac{a^2}{2}$$

$$\int_{c_4} (-3y + 2)\,dy = \int_a^0 (-3y + 2)\,dy = \frac{3a^2}{2} - 2a$$

olup

$$\iint_S (\nabla \wedge \vec{A})\,\vec{n}\,.\,dS = \int_c = -\frac{a^2}{12}(3\pi + 8a)$$

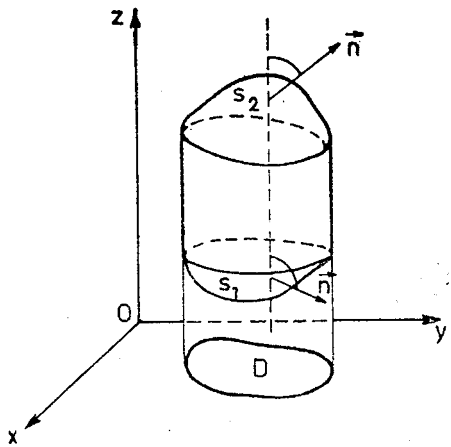
dır.

25.2 - 5. Diverjans teoremi (Ostrogradsky formülü).

S kapalı yüzeyi ile sınırlanmış ve xoy düzlemindeki izdüşümü D düzgün bölgesi olan üç boyutlu bir V düzgün bölgesi gözönüne alalım. S yüzeyinin S_1 , S_2 , S_3 gibi üç kısımdan meydana geldiğini düşünelim. Şekil 278. Bunlardan ilk ikisinin denklemleri

$$z = f_1(x, y) \quad , \quad z = f_2(x, y)$$

olsun, $f_1(x, y)$ ve $f_2(x, y)$, D bölgesinde sürekli fonksiyonlardır. Üçüncü S_3 kısmının, ana doğrusu oz e paralel, bir silindirik yüzey olduğunu kabul ediyoruz.



Şekil : 278

$N(x, y, z)$, V bölgesinde tanımlı skaler bir fonksiyon olarak,

$$I = \iiint_V \frac{\partial N(x, y, z)}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

integralini gözönüne alalım. z e göre integral alınırsa

$$I = \iint_D \left(\int_{f_1(x,\, y)}^{f_2(x,\, y)} \frac{\partial N}{\partial z}\, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

$$= \iint_D N[x, y, f_2(x, y)]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y - \iint_D N[x, y, f_1(x, y)]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \qquad (1)$$

elde edilir.

Yüzeyler üzerindeki pozitif normalin dışa doğru olduğunu kabul edelim. Buna göre $\cos(\vec{n}, z)$, S_2 yüzeyi üzerinde pozitif; S_1 yüzeyi üzerinde negatif ve S_3 yüzeyi üzerinde sıfıra eşittir.

(1) bağıntısının ikinci tarafındaki iki katlı integraller, aşağıdaki yüzey integrallerine eşit olacaktır. Bunlara göre

$$\iint_D N[x, y, f_2(x, y)]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint_{S_2} N(x, y, z) \cos(\vec{n}, z)\, \mathrm{d}S \qquad (2)$$

$$\iint_D N[x, y, f_1(x, y)]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = - \iint_{S_1} N(x, y, z) \cos(\vec{n}, z)\, \mathrm{d}S \qquad (3)$$

dir. (2) ve (3) deki bu sonuçları (1) de yerlerine koyarsak

$$\iiint_V \frac{\partial N(x, y, z)}{\partial z}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

$$= \iint_{S_2} N(x, y, z) \cos(\vec{n}, z)\, \mathrm{d}S + \iint_{S_1} N(x, y, z) \cos(\vec{n}, z)\, \mathrm{d}S$$

elde edilir. Bu son eşitliğin ikinci tarafına

$$\iint_{S_3} N(x, y, z) \cos(\vec{n}, z)\, \mathrm{d}S = 0$$

integralini ilave edersek

$$\iiint_V \frac{\partial N(x, y, z)}{\partial z} \, dx \, dy \, dz$$

$$= \iint_{S_1} N \cos(\vec{n}, z) \, dS + \iint_{S_2} N \cos(\vec{n}, z) \, dS + \iint_{S_3} N \cos(\vec{n}, z) \, dS$$

bulunur. İkinci taraftaki üç integralin toplamının S yüzeyinin tamamına ait bir yüzey integrali olduğu gözönüne alınırsa

$$\iiint_V \frac{\partial N(x, y, z)}{\partial z} \, dx \, dy \, dz = \iint_S N(x, y, z) \cos(\vec{n}, z) \, dS$$

elde edilir.

Benzer şekilde hareket edilerek,

$$\iiint_V \frac{\partial M(x, y, z)}{\partial y} \, dx \, dy \, dz = \iint_S M(x, y, z) \cos(\vec{n}, y) \, dS$$

$$\iiint_V \frac{\partial L(x, y. z)}{\partial x} \, dx \, dy \, dz = \iint_S L(x, y, z) \cos(\vec{n}, x) \, dS$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Bu üç eşitlik taraf tarafa toplanırsa :

$$\iiint_V \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz$$

$$= \iint_S [L \cos(\vec{n}, x) + M \cos(\vec{n}, y) + N \cos(\vec{n}, z)] \, dS$$

$$= \iint_S L \, dy \, dz + M \, dz \, dx + N \, dx \, dy \qquad (2)$$

bağıntısı elde edilir ki bu da *Ostrogradsky formülü* adını alır.

Bu formüldeki

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}$$

ifadesi

$$\vec{F} = L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}$$

vektörünün diverjansı olup

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{F}$$

yazılabilir. Bu takdirde, Ostrogradsky formülünün vektörel ifadesi olarak

$$\boxed{\iiint_V \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS}$$

formülü elde edilir. Bu formülün bir hidrodinamik izahı yapılabilir.

$\vec{F} = L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}$ vektörü, V bölgesinden geçen bir sıvının hız vektörü olsun. (2) bağıntıları içindeki yüzey integrali, $\vec{F}$ in dışa doğru olan $\vec{n}$ normali üzerindeki izdüşümünün integralidir. Bu da V bölgesinden birim zamanda çıkan sıvının miktarını verir. İntegral negatif ise, bölgeye giren sıvı miktarı olur. Bu miktar $\operatorname{div} \vec{F}$ in üç katlı integrali ile ifade edilmektedir. Eğer $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ ise, bütün kapalı yüzey üzerindeki iki katlı integral sıfır olur, yani giren veya çıkan sıvının miktarı sıfır olur. Daha açık olarak, bölgeye giren sıvının miktarının, çıkan sıvı miktarına eşit olduğu söylenir.

Ostrogradsky formülünün vektörel ifadesi *Diverjans* veya *Gauss teoremi* olarak adlandırılır. Bu teorem genel olarak şöyle ifade edilebilir.

TEOREM. Bir vektörün kapalı bir yüzeyden geçen akısı, bu vektörün diverjansının, bu yüzeyin sınırladığı bölgedeki integraline eşittir.

ÖRNEK 1. **Hidrodinamik uygulama**

$\rho(x, y, z, t)$ yoğunluklu bir sıvı içeren bir bölge ve bu bölge içinde S kapalı yüzeyi ile sınırlanmış bir V hacmi gözönüne alalım. V bölgesinin içindeki sıvının herhangibir t anındaki kütlesi $Q(t)$ olsun. Buna göre

$$Q(t) = \iiint_V \rho \, dV \tag{1}$$

dir. Sıvının herhangibir noktasındaki hızı $\vec{v}$ ise, V bölgesi içine birim zamanda giren sıvı kütlesi,

$$\frac{dQ}{dt} = -\iint_S (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n} \, dS \tag{2}$$

dir. (1) bağıntısının t ye nazaran türevini alır ve (2) bağıntısında yerine koyarsak

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\iint_S (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n} \, dS \tag{3}$$

ve ikinci taraftaki yüzey integraline diverjans teoremini uygularsak

$$\iint_S (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} (\rho \vec{v}) \, dV$$

elde edilir. Bu sonuç (3) bağıntısında yerine konursa

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\iiint_V \operatorname{div} (\rho \vec{v}) \, dV$$

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v})\right] dV = 0$$

elde edilir. Integral işareti altındaki ifade sürekli olup bu sonuçtan

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

yazılabilir. Bu bağıntı *süreklilik denklemi* adını alır. Eğer sıvı sıkışamaz bir sıvı ise ρ sabit olur. Bu nedenle

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

olarak

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

elde edilir. ρ sabit olunca

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \rho \operatorname{div} \vec{v}$$

yazılabileceğinden

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{v} = 0}$$

elde edilir ki bu da bir ***sıvının sıkışamamazlık şartını*** verir.

Vektör analizinden,

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

ise

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi$$

eşitliğini sağlıyan bir φ skalęr fonksiyonunun mevcut olabileceği bilinir. Sıkışamaz bir sıvı için

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi$$

eşitliğini sağlıyan φ fonksiyonuna *hız potansiyeli* denir. Buna göre, sıkışamaz bir sıvının hız potansieli

$$\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \operatorname{lap} \varphi = 0$$

denklemini sağlar.

ÖRNEK 2. S yüzeyi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küre yüzeyi olduğuna göre

$$\iint_S x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy$$

yüzey integralini hesaplayınız.

Ostrogradsky formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\iint_S x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy &= \iiint_V (1 + 1 + 1) \, dx \, dy \, dz \\
&= 3 \iiint_V dx \, dy \, dz \\
&= 3V = 4\pi
\end{aligned}$$

bulunur.

ÖRNEK 3. S yüzeyi $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ küre yüzeyi olduğuna göre

$$\iint_S x^3 \, dy \, dz + y^3 \, dz \, dx + z^3 \, dx \, dy$$

yüzey integralini hesaplayınız.

Ostrogradsky formülü uygulanırsa :

$$\iint_S x^3 \, dy \, dz + y^3 \, dz \, dx + z^3 \, dx \, dy = \iiint_V (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) \, dx \, dy \, dz$$

elde edilir. Şimdi de, ikinci taraftaki üç katlı integrali küresel koordinatlara dönüştürelim. Buna göre

$$x = r\sin\varphi\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\varphi\sin\theta \quad , \quad z = r\cos\varphi$$

olup

$$\iint_S = 3\iiint_V r^2 r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= 3\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_0^{R} r^4\, dr\right)$$

$$= \frac{12}{5}\pi R^5$$

ÖRNEK 4. S yüzeyi, $0 \leq z \leq b$ olarak $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$ koni yüzeyi olduğuna göre,

$$\iint_S x^2\, dy\, dz + y^2\, dz\, dx + z^2\, dx\, dy$$

yüzey integralini hesaplayınız.

Ostrogradsky formülü uygulanırsa

$$\iint_S x^2\, dy\, dz + y^2\, dz\, dx + z^2\, dx\, dy = \iiint_V (2x + 2y + 2z)\, dx\, dy\, dz$$

elde edilir. İkinci taraftaki üç katlı integralde evvelâ z e göre integral alınırsa :

$$= \iint_D \left(\int_{\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}}^{b} (2x + 2y + 2z)\, dz\right) dx\, dy$$

$$= \iint_D \left[b^2 + 2b(x+y) - \frac{2b}{a}(x+y)\sqrt{x^2+y^2} - \frac{b^2}{a^2}(x^2+y^2)\right] dx\, dy$$

bulunur. Bu integrali de kutupsal koordinatlara dönüştürürsek

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \left[b^2 \rho + 2b\rho^2 (\cos\theta + \sin\theta) - \frac{2b}{a} \rho^3 (\cos\theta + \sin\theta) - \frac{b^2}{a^2} \rho^3 \right] d\rho \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{a^2 b^2}{4} + \frac{a^3 b}{6} (\cos\theta + \sin\theta) \right] d\theta$$

$$= \left| \frac{a^2 b^2}{4} \theta + \frac{a^3 b}{6} (\sin\theta - \cos\theta) \right|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^2 b^2}{2}$$

elde edilir.

ÖRNEK 5. f ve g skaler fonksiyonlar olduğuna göre

$$\iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS = \iiint_V (f \cdot \nabla^2 g - g \cdot \nabla^2 f) \, dV$$

olduğunu gösteriniz.

Diverjans teoreminin

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

şeklindeki ifadesini

$$\iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS = \iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS - \iint_S g \frac{\partial f}{\partial n} dS$$

bağıntısının ikinci tarafındaki integrallere uygulayalım. Bu takdirde,

$$\iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS = \iint_S f \cdot \nabla g \cdot \vec{n} \, dS$$

$$= \iiint_V \operatorname{div}(f \,.\, \nabla g)\, \mathrm{d}V$$

$$= \iiint_V \nabla \,.\, (f \,.\, \nabla g)\, \mathrm{d}V$$

$$= \iiint_V (f \,.\, \nabla^2 g + \nabla f \,.\, \nabla g)\, \mathrm{d}V$$

ve

$$\iint_S g \frac{\partial f}{\partial n}\, \mathrm{d}S = \iiint_V (g \,.\, \nabla^2 f + \nabla g \,.\, \nabla f)\, \mathrm{d}V$$

elde edilerek bu iki bağıntı taraf tarafa çıkarılırsa

$$\iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) \mathrm{d}S = \iiint_V (f \,.\, \nabla^2 g - g \,.\, \nabla^2 f)\, \mathrm{d}V$$

bulunur.

25. BÖLÜME AİT PROBLEMLER.

EĞRİSEL İNTEGRAL

1) c eğrisi, $(0, 0)$ noktasından $(2, 2)$ noktasına giden doğru parçası olduğuna göre

$$\int_c y^2\, \mathrm{d}x$$

eğrisel integralini hesaplayınız,

Cevap. $\dfrac{8}{3}$

2) c eğrisi $x = \sqrt{1 - y^2}$ yarım çemberi olduğuna göre

$$\int_c y^2\,dx + x^2 dy$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{4}{3}$

3) c eğrisi, parametrik denklemleri $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ ve $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ olan eğri olduğuna göre

$$\int_c \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

Cevap. $-\frac{\pi}{2}$ ($u = tg^3 t$ dönüştürmesini yapınız)

4) c eğrisi köşeleri $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ olan karenin çevresi olduğuna göre

$$\int_c y^2\,dx + xy\,dy$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

Cevap. 0

5) c eğrisi $y = x^2$ parabolonun $(1,1)$ ve $(2, 4)$ noktaları arasındaki kısmı olduğuna göre

$$\int_c (x^2 - 2xy)\,dx + (2xy + y^2)\,dy$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{1219}{30}$

6) c eğrisi $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ sikloidinin birinci kemeri ve hareket yönü, t nin artan değerlerine karşılık olan yön olduğuna göre

$$\int_c (2a - y)\,dx + x\,dy$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

Cevap. $-2\pi a^2$

7) c eğrisi $x^2 + y^2 = a^2$ olduğuna göre

$$\oint_c \frac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2+y^2}$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

Cevap. -2π

8) c eğrisi $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$ eğrisinin $(1, 0, 0)$ noktasından $(1, 0, 2\pi)$ noktasına giden kısmı olduğuna göre

$$\int_c z\,dx + x\,dy + y\,dz$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

Cevap. 3π

9) c eğrisi $(1, 0, 1)$ den $(2, 3, 2)$ ye giden doğru parçası olduğuna göre

$$\int_c x^2\,dx - xz\,dy + y^2\,dz$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

Cevap. $-\dfrac{5}{3}$

10) c eğrisi, $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = at$ helisinin $(R, 0, 0)$ noktasından $(-R, 0, \pi a)$ noktasına gidilen kısmı olduğuna göre

$$\int_c x\,y\,dx + y^2\,dy + z^3\,dz$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{\pi^4 a^4}{4}$

11) c eğrisi $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ sikloidinin birinci kemeri olduğuna göre

$$\int_c y^2\,ds$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{256}{15}\,a^3$

12) c eğrisi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin birinci bölgedeki kısmı olduğuna göre

$$\int_c x\,y\,\mathrm{d}s$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{ab\,(a^2 + ab + b^2)}{3\,(a + b)}$

13) c eğrisi $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ lemniskatının sağ tarafta kalan halkası olduğuna göre

$$\int_c (x + y)\,\mathrm{d}s$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

Cevap. $\sqrt{2}\,a^2$

14) c eğrisi $x = \cos t$, $y = \cos t$, $z = \sqrt{2} \sin t$ $\left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ eğrisinin $(1, 1, 0)$ noktasından $(0, 0, \sqrt{2})$ noktasına gidilen kısmı olduğuna göre

$$\int_c x^2\,yz\,\mathrm{d}s$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{1}{2}$

15) c eğrisi $(-1, 2)$ den $(2, 3)$ e giden herhangibir yol olduğuna göre

$$\int_c x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

Cevap. 8

16) c eğrisi $(-2, -1)$ den $(3, 0)$ a giden herhangibir yol olduğuna göre

$$\int_c (x^4 + 4xy^3)\,\mathrm{d}x + (6x^2 y^2 - 5y^4)\,\mathrm{d}y$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

Cevap. 62

17) c eğrisi $(1, 0, -3)$ den $(6, 4, 8)$ e giden herhangibir yol olduğuna göre

$$\int_c x\,dx + y\,dy - z\,dz$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

Cevap. -2

18) c eğrisi $(0, 0, 0)$ dan $(3, 4, 5)$ e giden herhangibir yol olduğuna göre

$$\int_c \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

Cevap. $5\sqrt{2}$

19) c eğrisi $(0, 0, 1)$ den $\left(1, \frac{\pi}{4}, 2\right)$ ye giden herhangibir yol olduğuna göre

$$\int_c 2xyz^2\,dx + (x^2 z^2 + z\cos yz)\,dy + (2x^2 yz + y\cos yz)\,dz$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

Cevap. $\pi + 1$

20) $u = \sin xy + \cos yz + \sin xz$ ve c eğrisi $\left(0, \frac{\pi}{4}, 1\right)$ den $\left(0, 1, \frac{\pi}{4}\right)$ e giden doğru parçası ile $\left(0, 1, \frac{\pi}{4}\right)$ den $\left(\frac{\pi}{2}, 1, 0\right)$ a giden doğru parçasının meydana getirdiği eğri olduğuna göre

$$\int_c \nabla u \cdot d\vec{r}$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

Cevap. $2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

GREEN FORMÜLÜ

21) c eğrisi. köşeleri $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ $D(1, 3)$ olan üçgenin çevresi olduğuna göre

$$\oint_c 2(x^2 + y^2)\,dx + (x + y)^2\,dy$$

eğrisel integralini Green formülünden faydalanarak hesaplayınız.

Cevap. $-\dfrac{4}{3}$

22) c eğrisi $x^2 + y^2 = R^2$ çemberi olduğuna göre

$$\oint_c -x^2 y\,dx + xy^2\,dy$$

eğrisel integralini Green formülünden faydalanarak hesaplayınız.

Cevap, $\dfrac{\pi R^4}{2}$

23) c eğrisi birim yarıçaplı bir çember olduğuna göre

$$\oint_c (x^2 - y^3)\,dx + (y^2 + x^3)\,dy$$

eğrisel integralini, Green formülünden faydalanarak hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{3\pi}{2}$

24) c eğrisi köşeleri $(0, 0)$, $(1, 0)$, $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ olan dikdörtgenin çevresi olduğuna göre

$$\oint_c e^x \sin y\,dx + e^x \cos y\,dy$$

eğrisel integralini, Green formülünden faydalanarak, hesaplayınız.

Cevap. 0

25) c eğrisi $x^2 + y^2 = 1$ çemberi olduğuna göre

$$\oint_c (2x^3 - y^3)\,dx + (x^3 + y^3)\,dy$$

eğrisel integralini, Green formülünden faydalanarak, hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{3\pi}{2}$

26) c eğrisi $x^2 + y^2 = 1$ çemberi ve $\vec{u} = \text{grad}\,(x^2 y)$ olduğuna göre

$$\int_c \vec{u} \,.\, d\vec{r}$$

eğrisel integralini, Green formülünden faydalanarak, hesaplayınız.

Cevap. 0

27) c eğrisi, köşeleri $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$ olan karenin çevresi olduğuna göre

$$\oint_c e^x (x + \sin y)\, dx + e^x (x + \cos y)\, dy$$

eğrisel integralini Green formülünden faydalanarak, hesaplayınız.

Cevap. $2(e + e^{-1}) = 4 \operatorname{ch} 1$

28) c eğrisi, $y = x^4 + 1$, $y = 2$ eğrilerinin meydana getirdiği kapalı çevre olduğuna göre,

$$\oint_c \frac{e^y}{x}\, dx + (e^y \log x + 2x)\, dy$$

eğrisel integralini, Green formülünden faydalanarak, hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{16}{5}$

29) c eğrisi $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi olduğuna göre

$$\int_c \sqrt{x^2 + y^2}\, dx + y\,[xy + \log (x + \sqrt{x^2 + y^2})]\, dy$$

eğrisel integralini Green formülünden faydalanarak hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{\pi a b^3}{4}$

30) c eğrisi $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 3$ doğrularının meydana getirdiği dörtgenin çevresi ve

$$\vec{u} = \left(\frac{4}{5} xy^5 + 2y - e^x\right)\vec{i} + (2xy^4 - 4 \sin y)\, \vec{j}$$

olduğuna göre $\int_c \vec{u} \,.\, d\vec{r}$ eğrisel integralini, Green formülünden faydalanarak hesaplayınız.

Cevap. $-\frac{988}{5}$

ALAN HESABINA UYGULAMA

31) Eğrisel integral yardımiyle $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ eğrisinin sınırladığı alanı hesaplayınız.

Çevap. $\frac{3}{8}\pi a^2$

32) Eğrisel integral yardımıyle, $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$ kardioidinin sınırladığı alanı hesaplayınız.

Cevap. $6\pi a^2$

YÜZEY İNTEGRALLERİ

33) S yüzeyi $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küre yüzeyi olduğuna göre

$$\iint_S (x^2 + y^2)\, dS$$

yüzey integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{8}{3}\pi a^4$

34) S yüzeyi $z^2 = x^2 + y^2$ konisinin $z = 1$, $z = 2$ düzlemleri arasındaki kısmı olduğuna göre

$$\iint_S x^2\, dS$$

yüzey integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{15\sqrt{2}}{4}\pi$

35) S yüzeyi $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geqq 1$ yüzeyi olduğuna göre

$$\iint_S (x^2 + y^2)\, dS$$

yüzey integralini hesaplayınız.

Cavap. $\frac{20\pi}{3}$

36) S yüzezi $x+y+z=1$ düzleminin birinci bölgedeki kısmı olduğuna göre

$$\iint_S x\,\mathrm{d}S$$

yüzey integralıni hesaplayınız.

Cevap. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

37) S yüzeyi $x^2+y^2=1$ silindirinin $z=0$ ve $z=x+2$ düzlemleri arasındaki kısmı olduğuna göre

$$\iint_S xz\,\mathrm{d}S$$

yüzey integralini hesaplayınız.

Cevap. 2π

38) S yüzeyi $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=a$ düzlemlerinin meydana getirdiği dört yüzlünün dış kısmı olduğuna göre

$$\iint_S yz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + xz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

yüzey integralini hesaplayınız.

Cevap. 0

39) S yüzeyi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ elipsoidinin dış yüzü olduğuna göre

$$\iint_S z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

yüzey integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{4}{3}\pi abc$

40) S yüzeyi $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(z \geqq 0)$ yarım küresinin dış kısmı olduğuna göre

$$\iint_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$$

yüzey integralini hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{\pi a^4}{2}$

41) $\vec{F} = 18z\,\vec{i} - 12\,\vec{j} + 3y\,\vec{k}$ ve S yüzeyi $2x + 3y + 6z = 12$ düzleminin birinci bölgedeki kısmı olduğuna göre

$$\iint_S \vec{F} \,.\, \vec{n}\,dS$$

yüzey integralini hesaplayınız,

Cevap. 24

42) $\vec{F} = z\,\vec{i} + x\,\vec{j} + 3y^2 z\,\vec{k}$ ve S yüzeyi $x^2 + y^2 = 16$ silindirinin birinci bölgede, $z = 0$ ve $z = 5$ düzlemleri arasında kalan kısmı olduğuna göre

$$\iint_S \vec{F} \,.\, \vec{n}\,dS$$

yüzey integralini hesaplayınız.

Cevap. 90

43) S yüzeyi $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinin xoy düzleminin üst tarafında kalan kısmı ve $\vec{F} = y\,\vec{i} + (x - 2xz)\,\vec{j} - xy\,\vec{k}$ olduğuna göre

$$\iint_S (\nabla \wedge \vec{F}) \,.\, \vec{n}\,dS$$

yüzey integralini hesaplayınız.

Cevap. 0

STOKES TEOREMİ

44) c eğrisi $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$ çemberi olduğuna göre Stokes formülünden faydalanarak

$$\oint_c (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$$

integralini hesaplayınız ve sonucu, integrali doğrudan doğruya hesaplamak suretiyle sağlayınız.

Cevap 0

45) c eğrisi $x^2+y^2=1$, $x+z=1$ elipsi olduğuna göre, Stokes formülünden faydalanarak

$$\oint_c (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$$

integralini hesaplayınız ve sonucu, integrali doğrudan doğruya hesaplamak suretiyle sağlayınız.

Cevap. -4π

46) c eğrisi $x=a\sin t$, $y=a\cos t$, $z=a(\sin t+\cos t)$, $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ eğrisi olduğuna göre, Stokes formülünden faydalanarak

$$\oint_c x\,dx + (x+y)\,dy + (x+y+z)\,dz$$

integralini hesaplayınız ve sonucu, integrali doğrudan doğruya hesaplamak suretile sağlayınız.

Cevap. $-\pi a^2$

47) $\vec{F}=(2x-y)\vec{i}-yz^2\vec{j}-y^2z\vec{k}$ ve S yüzeyi $x^2+y^2+z^2=1$ küresinin xoy nin üst tarafında kalan kısmı olduğuna göre Stokes teoremini sağlayınız.

Cevap. π

48) $\vec{F}=(y-z+2)\vec{i}+(yz+4)\vec{j}-xz\vec{k}$ ve S yüzeyi $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=2$, $z=2$ küpünün xoy düzleminin üst tarafında kalan kısmı olduğuna göre Stokes teoremini sağlayınız.

Cevap. -4

49) $\vec{F}=(x^2+y-4)\vec{i}+3xy\vec{j}+(2xz+z^2)\vec{k}$ ve S yüzeyi $x^2+y^2+z^2=16$ küresinin xoy nin üst tarafında kalan kısmı olduğuna göre

$$\iint_S (\nabla \wedge \vec{F})\cdot\vec{n}\; dS$$

yüzey integralini hesaplayınız.

Cevap. -16π

DİVERJANS TEOREMİ, (OSTROGRADSKY FORMÜLÜ)

50) S yüzeyi $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = a$, $z = 0$, $z = a$ küpünün dış yüzeyi olduğuna göre

$$\iint_S x^2\, dy\, dz + y^2\, dz\, dx + z^2\, dx\, dy$$

yüzey integralini, Ostrogradsky formülünden faydalanarak, hesaplayınız.

Cevap, $3a^4$

51) S yüzeyi $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$ piramidinin dış yüzü olduğuna göre

$$\iint_S x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy$$

yüzey inteğralini, Ostrogradsky formülünden faydalanarak, hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{a^3}{2}$

52) S yüzeyi $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinin dış yüzü olduğuna göre

$$\iint_S x^3\, dy\, dz + y^3\, dz\, dx + z^3\, dx\, dy$$

yüzey integralini, Ostrogradsky formülünden faydalanarak hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{12}{5}\pi a^5$

53) S yüzeyi $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ küre yüzeyi olduğuna göre

$$\iint_S (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma)\, dS$$

yüzey integralini Ostrogradsky formülünden faydalanarak hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{8\pi a^4}{3}$

54) S yüzeyi $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küre yüzeyi olduğuna göre

$$\iint_S (y\cos^2 x + y^3)\,dz\,dx + z(\sin^2 x - 3y^2)\,dx\,dy$$

yüzey integralini, Ostrogradsky formülünden faydalanarak hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{32\pi}{3}$

55) S yüzeyi $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ yarım küresi olduğuna göre

$$\iint_S xz^2\,dy\,dz + (x^2 y - z^3)\,dz\,dx + (2xy + y^2 z)\,dx\,dy$$

yüzey integralini, Ostrogradsky formülünden faydalanarak hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{2\pi a^5}{5}$

56) S yüzeyi $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, $0 \leqq z \leqq 1$ küp yüzeyi ve $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ olduğuna göre

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$$

yüzey integralini, diverjans teoreminden faydalanarak, hesaplayınız.

Cevap. 3

57) S yüzeyi kapalı bir yüzey ve $\vec{r}$ yer vektörü olduğuna göre

$$\iint_S \vec{r}\cdot\vec{n}\,dS$$

yüzey integralini diverjans teoreminden faydalanarak hesaplayınız.

Cevap. $3V$

58) f ve g skaler fonksiyonlar ; $\dfrac{\partial f}{\partial n}$, f nin $\vec{n}$ normali doğrultusundaki türevi ve V de S yüzeyi ile sınırlanmış bölge olduğuna göre

$$\iiint_V g\cdot\nabla^2 f\,dV = \iint_S g\,\frac{\partial f}{\partial n}\,dS - \iiint_V \nabla g\cdot\nabla f\,dV$$

olduğunu gösteriniz.

59) g skaler fonksiyonu V bölgesinde harmonik bir fonksiyon ise

$$\iint_S g \frac{\partial g}{\partial n} \mathrm{d}S = \iiint_V |\nabla g|^2 \mathrm{d}V$$

olduğunu gösteriniz.

60) $\vec{n}$, S alanlı bir kapalı yüzeyin dışa doğru olan normal birim vektörü ise

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{n}\, \mathrm{d}V = S$$

olduğunu gösteriniz.

61) $\vec{r}$ yer vektörü, $\vec{n}$ de S yüzeyinin dışa doğru olan normal birim vektörü ise

$$\iiint_V \frac{\mathrm{d}V}{|\vec{r}|^2} = \iint_S \frac{\vec{r}\,.\,\vec{n}}{|\vec{r}|^2} \mathrm{d}S$$

olduğunu gösteriniz.

62) S yüzeyi $x=0$, $x=1$ $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$ küp yüzeyi ve $\vec{F} = 4xz\,\vec{i} - y^2\,\vec{j} + yz\,\vec{k}$ olduğuna göre

$$\iint_S \vec{F}\,.\,\vec{n}\, \mathrm{d}S$$

yüzey integralini diverjans teoreminden faydalanarak hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{3}{2}$

26. BÖLÜM

İNTEGRAL İŞARETİ ALTINDA TÜREV

26.1 Bir parametreye bağlı integrallerin türetilmesi.

$f(x, \alpha)$ fonksiyonu, x bağımsız değişkeninden başka α parametresine bağlı bir fonksiyon olarak,

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

integralini göz önüne alalım. α değişirse, integralin değeri de değişecektir. Buradan integralin, α nın bir fonksiyonu olduğu sonucu çıkar.

26.1 - 1. İntegral sınırlarının α ya bağlı olmaması halinde $\dfrac{dI}{d\alpha}$ türevinin hesabı.

$f(x, \alpha)$ ve $f'_\alpha(x, \alpha)$ fonksiyonları

$$c \leqslant \alpha \leqslant d \quad ; \quad a \leqslant x \leqslant b$$

aralıklarında sürekli fonksiyonlar olsunlar. a ve b nin α ya bağlı olmadığını kabul ediyoruz. Bunlara göre, integralin α ya göre türevini hesaplıyalım. Tanım olarak

$$\frac{dI}{d\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{I(\alpha + \Delta\alpha) - I(\alpha)}{\Delta\alpha}$$

dır. Diğer taraftan

$$I(\alpha + \Delta\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha)\, dx$$

ve

$$I(\alpha + \Delta\alpha) - I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha)\, dx - \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

$$= \int_a^b [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)]\, dx$$

olup

$$\frac{I(\alpha + \Delta\alpha) - I(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int_a^b \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\, dx$$

dir. Şimdi de integral işareti altındaki bağıntıya sonlu artımlar formülünü uygulayalım. Bu takdirde

$$\frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} = f'_\alpha (x, \alpha + \theta . \Delta\alpha) \quad ; \quad 0<\theta<1$$

elde edilir. $f'_\alpha (x, \alpha)$ türevi, $c \leqslant \alpha \leqslant d$, $a \leqslant x \leqslant b$ kapalı bölgesinde sürekli olduğundan

$$f'_\alpha (x, \alpha + \theta . \Delta\alpha) = f'_\alpha (x, \alpha) + \varepsilon$$

yazılabilir. Buradaki ε

$$\lim_{\Delta\alpha \to 0} \varepsilon = 0$$

eşitliğini sağlıyan bir sonsuz küçüktür. Bunlara göre

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b [f'_\alpha(x,\alpha)+\varepsilon]\,dx$$

$$=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx+\int_a^b \varepsilon\,dx$$

olup

$$\frac{dI}{d\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$

dir. O halde

$$\boxed{\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx=\int_a^b \frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha)\,dx}$$

elde edilmiş olur ki bu da *Leibnitz formülü* adını alır.

ÖRNEK 1. $F(y)=\int_0^1 \log(x^2+y^2)\,dx$ olduğuna göre $\frac{dF}{dy}$ yi hesaplayınız.

Burada α yerinde y bulunmaktadır. O halde Leibnitz formülü uygulanırsa

$$\frac{dF}{dy}=\frac{d}{dy}\int_0^1 \log(x^2+y^2)\,dx$$

$$=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\log(x^2+y^2)\,dx$$

$$=\int_0^1 \frac{2y}{x^2+y^2}\,dx=\left|2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}\right|_0^1$$

$$=2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{y}$$

elde edilir.

ÖRNEK 2. $\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ integralini hesaplayınız.

$e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x}$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonu adi fonksiyonlar cinsinden ifade edilemiyeceğinden bu integrali, belirsiz integrali belirtmek yolundan, hesaplamak mümkün olamayacaktır. Integrali hesaplamak için bu integrali, α parametresinin bir fonksiyonu olarak kabul edeceğiz. Buna göre

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

olup, Leibnitz formülünü uygulayarak, α parametresine göre türev alırsak

$$I'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \cos \alpha x \, dx$$

bulunur. İkinci taraftaki integral, kolayca hesaplanabilir. Bu takdirde

$$I'(\alpha) = \frac{1}{1 + \alpha^2}$$

bulunur. $I(\alpha)$ yı belirtmek üzere, heriki tarafın integrali alınırsa

$$I(\alpha) = \text{Arctg}\, \alpha + c$$

elde edilir. Şimdi de c sabitini bulmak üzere $I(0)$ ı oluşturalım.

$$I(0) = \int_0^{\infty} 0 \, . \, dx = 0 = \text{Arctg}\, 0 + c$$

olup

$$c = 0$$

dır. O halde

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \text{Arctg}\, \alpha$$

dır.

ÖRNEK 3. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$ eşitliğinden faydalanarak

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$$

integralini hesaplayınız.

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2}\, a^{-1/2}$$

yazalım ve her iki tarafı a ya göre türetelim.

$$I'(a) = \int_0^\infty - \frac{dx}{(x^2+a)^2} = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) a^{-3/2}$$

$$I''(a) = \int_0^\infty 2\frac{dx}{(x^2+a)^3} = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)a^{-5/2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1\,.\,3}{2^2}\,a^{-5/2}$$

$$I'''(a) = \int_0^\infty -2\,.\,3\frac{dx}{(x^2+a)^4} = -\frac{\pi}{2}\,\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2^3}\,a^{-7/2}$$

... ...

... ...

$$I^{(n)}(a) = \int_0^\infty (-1)^n\,2\,.\,3\ldots n\,\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}$$

$$= (-1)^n\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2^n}\,a^{-\frac{2n+1}{2}}$$

olup

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n\,.\,n!}\,a^{-\frac{2n+1}{2}}$$

ve $a = 1$ için

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2^n\,.\,n!}$$

dir.

26.1 - 2. İntegral sınırlarının α ya bağlı olması halinde $\frac{dI}{d\alpha}$ türevinin hesabı.

Şimdi de

$$\int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

integralindeki a, b sınırlarının α nın fonksiyonları olduğunu kabul ederek, integralin α ya göre türevini hesaplıyalım. Buna göre

$$I(\alpha) = \phi[\alpha, a(\alpha), b(\alpha)] = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx$$

dir. $\phi[\alpha, a(\alpha), b(\alpha)]$ fonksiyonu a ve b vasıtasile α nın bir bileşik fonksiyonudur. $I(\alpha)$ nın türevini hesaplamak için, bileşik fonksiyonlara ait türev kuralını uygulayalım. (Bak. 20.4-2.) Bu takdirde

$$I'(\alpha) = \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \phi}{\partial a}\frac{da}{d\alpha} + \frac{\partial \phi}{\partial b}\frac{db}{d\alpha}$$

elde edilir. Bir belirli integralin, değişken üst sınırına ait türev teoreminden, yani

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)\, dx = f(x)$$

olduğundan,

$$\frac{\partial \phi}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x, \alpha)\, dx = f[b(\alpha), \alpha]$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x, \alpha)\, dx = -\frac{\partial}{\partial a}\int_b^a f(x, \alpha)\, dx = -f[a(\alpha), \alpha]$$

dır. $\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}$ yı hesaplamak için de Leibnitz formülünü kullanırsak

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha)\, dx$$

bulunur. Bunlar $I'(\alpha)$ bağıntısında yerlerine konursa

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)\,dx + f[b(\alpha),\alpha]\frac{db}{d\alpha} - f[a(\alpha),\alpha]\frac{da}{d\alpha}$$

elde edilir.

ÖRNEK 1. $F(y) = \int_{\sin y}^{e^y} \sqrt{1+x^3}\,dx$ den $F'(y)$ yi hesaplayınız.

$$\frac{dF}{dy} = \int_{\sin y}^{e^y} (\sqrt{1+x^3})'_y\,dx + \sqrt{1+e^{3y}}\,e^y - \sqrt{1+\sin^3 y}\,\cos y$$

$$\frac{dF}{dy} = \sqrt{1+e^{3y}}\,e^y - \sqrt{1+\sin^3 y}\,\cos y$$

ÖRNEK 2. $F(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{arctg}\frac{t}{x^2}\,dt$ olduğuna göre $F'(x)$ türevini hesaplayınız.

$$F'(x) = \int_0^{x^2} \frac{-2tx}{x^4+t^2}\,dt + \operatorname{arctg} 1 \,.\, 2x - 0$$

$$= \int_0^{x^2} \frac{-2xt}{x^4+t^2}\,dt + \frac{\pi}{4}\,.\,2x$$

$$= \frac{\pi}{2}x - \Big| x\log(x^4+t^2)\Big|_0^{x^2}$$

$$= \frac{\pi}{2}x - x\log 2x^4 + x\log x^4$$

$$= \frac{\pi}{2}x - x\log 2 - x\log x^4 + x\log x^4$$

$$= x\left(\frac{\pi}{2} - \log 2\right)$$

dir.

26. BÖLÜME AİT PROBLEMLER.

1) $F(u) = \int_0^4 \log(1 - u^2 x^2)\, dx$ den $F'(u)$ yu hesaplayınız.

Cevap. $F'(u) = \int_0^4 \frac{-2ux^2}{1 - u^2 x^2}\, dx$

2) $f(x) = \int_x^\infty e^{-x y^2} dy$, $(x > 0)$ den $f'(x)$ i hesaplayınız.

Cevap. $f'(x) = -\int_x^\infty y^2 e^{-xy^2} dy - e^{-x^3}$

3) $u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x f(z)}{x^2 + (y - z)^2}\, dz$ fonksiyonunun

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

bağıntısını sağladığını gösteriniz.

4) $\int_0^1 x^{n-1}\, dx = \frac{1}{n}$, $(n > 0)$ den faydalanarak

$$\int_0^1 x^{n-1} \log x \, dx$$

i hesaplayınız.

Cevap. $-\frac{1}{n^2}$

5) $\int_0^\infty e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p}$, $(p > 0)$ den faydalanarak

$$\int_0^\infty t^2 e^{-pt}\, dt$$

integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{2}{p^3}$

6) $\alpha > 1$ olarak

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

olduğu bilindiğine göre

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(2 - \cos x)^2}$$

integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

7) $F'(\alpha)$ dan faydalanarak

$$F(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha} - 1}{\log x}\, dx$$

integralini hesaplayınız.

Cevap. $F(\alpha) = \log(1 + \alpha)$

8) $\alpha > 0$, $\beta > 0$ olarak

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\, dx$$

integralini hesaplayınız.

Cevap. $\log \frac{\beta}{\alpha}$

9) $\alpha > 0$, $\beta > 0$ olarak

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx\, dx$$

integralini hesaplayınız.

Cevap. $\operatorname{arctg} \frac{\beta}{m} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{m}$

10) $\alpha > 0$, $\beta > 0$ olarak

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} \, dx$$

integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{1}{2} \log \frac{\beta}{\alpha}$

11) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1+x^2)} \, dx$ integralini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{\pi}{2} \log (1+\alpha)$

12) $\int_0^1 \frac{\log (1-\alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}} \, dx$ integralini hesaplayınız. $(|\alpha| < 1)$

Cevap. $\pi (\sqrt{1-\alpha^2} - 1)$

13) $\int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} \, dx$ integralini hesaplayınız. $(\alpha \geqslant 0)$

Cevap. $\operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta}$

İNDEKS

F

G

H

I, İ

K

L

M, N

O, Ö

P

R

S

T

U, Ü

V

Y

BİBLİYOGRAFYA

AKBULUT FAHRETTİN	Vektörel analiz
AYRES, Frank	Differential Equations
BOURNE, D.E. - KENDAL, P.C.	Vector Analysis
DEMİDOVİTH, B.	Recueil d'éxercies et de problémes d'analyse mathématique
KAPLAN, Wilfred	Advanced calculus
LESIEUR, L - LEFEBVRE, J.	Mathématiques
LOVE, C.-RAINVILLE, E.	Differential and integral calculus
MASSART, J.	Cours d'analyse
PISKOUNOV, N.	Calcul différentiel et intégral
PROTTER, M. - MORREY, C.	Modern Mathematical Analysis
QUINET, J.	Cours élémentaire de mathématiques Supérieures
SPIGEL, Murray R.	Vector analysis
SPIGEL, Murray R.	Advanced calculus
TAYLOR, H.E.-WADE, T.L.	University calculus
WILLIAM, K. Smith	Calculus with Analytic geometry
WOODS-BAILEY-(SALLIN, A.)	Mathématiques génerales

BİRİNCİ VE İKİNCİ CİLDİN İÇERDİĞİ KONULAR

YÜKSEK MATEMATİK
Cilt 1

YÜKSEK MATEMATİK
Cilt 2